



ACTUALIZACIÓN DE PROGRAMAS
DE NIVEL MEDIO

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

PRIMER AÑO

PLAN CBU (RM N° 1813/88 Y 1182/90)
PLAN BC (DECRETO N° 6680/56)

2002

© Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Secretaría de Educación
Dirección de Currícula. 2002

Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula
Bartolomé Mitre 1249 . CPA c1036aaw . Buenos Aires
Teléfono: 4375 6093 . teléfono/fax: 4373 5875
e-mail: dircur@buenosaires.esc.edu.ar

Permitida la transcripción parcial de los textos incluidos en esta obra, hasta 1.000 palabras, según Ley 11.723, art. 10º, colocando el apartado consultado entre comillas y citando la fuente; si éste excediera la extensión mencionada deberá solicitarse autorización a la Dirección de Currícula. Distribución gratuita. Prohibida su venta.

GOBIERNO DE LA CIUDAD AUTÓNOMA DE BUENOS AIRES

Jefe de Gobierno

DR. ANÍBAL IBARRA

Vicejefa de Gobierno

LIC. CECILIA FELGUERAS

Secretario de Educación

LIC. DANIEL F. FILMUS

Subsecretaria de Educación

LIC. ROXANA PERAZZA

Directora General
de Educación Superior

DRA. CRISTINA DAVINI

Directora General
de Planeamiento

LIC. FLAVIA TERIGI

Directora General
de Educación

HAYDÉE C. DE CAFFARENA

Dir.^a de Currícula

LIC. SILVIA MENDOZA

Dir. de Educación

Media y Técnica

PROF. DOMINGO TAVARONE

Dir.^a de Educación

Artística

LIC. SUSANA MARTÍN

ACTUALIZACIÓN DE PROGRAMAS DE PRIMER AÑO. NIVEL MEDIO

EQUIPO TÉCNICO

EQUIPO CENTRAL: Marcela Benegas, Estela Cols, Silvina Feeney, Graciela Cappelletti, Marina Elberger.

BIOLOGÍA: Laura Lacreu, Mirta Kauderer.

EDUCACIÓN CÍVICA: Isabelino Siede, Nancy Cardinaux, Vera Waksman.

EDUCACIÓN FÍSICA: Eduardo Prieto, Silvia Ferrari.

GEOGRAFÍA: Adriana Villa.

HISTORIA: Mariana Canedo.

INFORMÁTICA: Susana Muraro, Rosa Cicala.

LENGUA Y LITERATURA: Delia Lerner, María Jimena Dib, María Elena Rodríguez, Hilda Weitzman.

MATEMÁTICA: Patricia Sadovsky, Carmen Sessa, Horacio Itzcovich, Gustavo Barallobres.

MÚSICA: Clarisa Alvarez.

PLÁSTICA: Graciela Sanz.

TEATRO: Helena Alderoqui, Hilda Elola.

TECNOLOGÍA: Abel Rodríguez de Fraga, Claudia Figari.

LA EDICIÓN DE ESTE TEXTO ESTUVO A CARGO DE LA DIRECCIÓN DE CURRÍCULA.

COORDINACIÓN EDITORIAL: Virginia Piera.

DISEÑO GRÁFICO Y SUPERVISIÓN DE EDICIÓN: María Laura Cianciolo, Gabriela Middonno.

Í N D I C E

MARCO GENERAL 5

- 1. PROCESO DE ACTUALIZACIÓN DE PROGRAMAS 6
- Etapas principales del proceso de actualización curricular 7
- 2. LOS PROPÓSITOS FORMATIVOS QUE ENMARCAN LA ACTUALIZACIÓN CURRICULAR 8
- 3. ¿QUÉ ES UN PROGRAMA OFICIAL? 10
- 4. CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES DE LOS PROGRAMAS 10
- Fundamentación y propósitos de la asignatura 11
- Contenidos de enseñanza 12
- Objetivos de aprendizaje 14
- 5. PROGRAMA, PROGRAMACIÓN INSTITUCIONAL Y PLANIFICACIÓN DOCENTE 15

PROGRAMA DE MATEMÁTICA 21

- INTRODUCCIÓN 21
- PROPÓSITOS DE LA ENSEÑANZA 29
- ORGANIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS 30
- OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DEL BLOQUE NÚMEROS 35
- OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DEL BLOQUE ÁLGEBRA Y FUNCIONES 41
- OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DEL BLOQUE GEOMETRÍA 47

ANEXO 49

MARCO GENERAL

Este documento presenta un marco general sobre el proceso de actualización curricular y aportes para encarar el trabajo en torno a los programas en las escuelas. Este material se complementará con otros que oportunamente la Dirección de Currícula hará llegar a las escuelas con la intención de acompañarlas en esta etapa.

El proceso que se ha iniciado supone un cambio progresivo que es necesario sostener en el tiempo. Requiere la participación de diversos actores institucionales que, desde su función específica, obren de manera articulada. Se plantean aquí algunas recomendaciones de carácter general que pretenden orientar la tarea que cada institución llevará a cabo de un modo particular, respondiendo a eventuales situaciones que surjan a lo largo del año.

1. PROCESO DE ACTUALIZACIÓN DE PROGRAMAS

Durante el año 2001, la Secretaría de Educación de la Ciudad de Buenos Aires ha iniciado un proceso de actualización curricular de los primeros años de la escuela media. Diferentes trabajos de diagnóstico e intervención llevados a cabo en años anteriores, sumados al relevamiento de programas de asignaturas de primer y segundo años realizado por la Dirección de Currícula a principios del año 2001, permitieron efectuar un análisis de la oferta curricular actual y de las principales preocupaciones ligadas al desarrollo de los procesos de enseñanza en el primer tramo de la escuela secundaria.

Este análisis puso de manifiesto que una de las dificultades desde el punto de vista curricular es la coexistencia de criterios significativamente diferentes que orientan la selección y organización del contenido de una misma asignatura del Plan de Estudios. Esta situación expresa la multiplicidad de puntos de referencia y fuentes que consideran los profesores a la hora de definir el programa. Ello resulta problemático cuando los criterios son tan disímiles que no permiten garantizar ciertos parámetros comunes para la formación y evaluación de los estudiantes de las distintas escuelas medias de la Ciudad y expresan la ausencia de un marco de definiciones básicas compartidas. Esto dificulta también la posibilidad de intercambio y comunicación de experiencias entre profesores de una misma asignatura, así como la planificación y desarrollo de acciones conjuntas de orden pedagógico y curricular.

Otra problemática es la existencia de elevados índices de fracaso en este tramo de la escolaridad. Esta cuestión es curricular sólo en parte, ya que su origen está asociado a una compleja trama de factores entre los que se encuentran aquellos de origen didáctico, institucional, socioeconómico y cultural. Pero por sobre todo, se trata de una cuestión ligada a un proceso histórico de profunda transformación del nivel que trae aparejado el acceso a él de grupos de estudiantes diversos, la emergencia de nuevas demandas a la escuela y la necesaria redefinición de los propósitos formativos, de las estructuras institucionales y pedagógicas y de las condiciones laborales de los profesores.¹

Frente a estas preocupaciones, la Secretaría de Educación ha iniciado dos años atrás el proceso de renovación de la propuesta formativa de la escuela que permita organizar el proyecto educativo alrededor de algunos propósitos visibles, establecer un marco

1 | En el marco de estos propósitos la Dirección General de Planeamiento viene desarrollando, desde el año 2001, el Programa de Fortalecimiento Institucional de la Escuela Media, que ha posibilitado el diseño y desarrollo de proyectos institucionales.

común y promover el trabajo institucional sobre los aspectos curriculares y pedagógicos. Al mismo tiempo, esta propuesta debe habilitar el desarrollo de variadas experiencias por parte de escuelas y profesores y recuperar los procesos de renovación pedagógica que se han producido en los distintos establecimientos en los últimos años.

ETAPAS PRINCIPALES DEL PROCESO DE ACTUALIZACIÓN CURRICULAR

La Dirección de Currícula, ha llevado a cabo un proceso de reformulación de los programas de las distintas asignaturas que integran el Plan de Estudios Ciclo Básico Unificado.² Durante el año 2001, la Dirección de Currícula elaboró versiones preliminares de los programas que fueron presentadas y discutidas en reuniones de intercambio con profesores que se llevaron a cabo durante el mes de noviembre.

Continuando esta línea de trabajo con los docentes del Sistema, el año 2002 estuvo destinado a la realización de reuniones para la difusión de las propuestas y el intercambio de opiniones.³ Se avanzó además, en el diseño y la discusión de las versiones preliminares de programas para las asignaturas de segundo año.

Los programas que llegan en esta oportunidad a las escuelas junto con este documento, constituyen las versiones definitivas para las asignaturas de primer año del CBU y se asume el compromiso para el año 2003 de llevar a cabo un proceso de consulta y elaborar las versiones definitivas para segundo año.

2 | Incluye los planes de estudios CBU/88 y CBU/90. Las propuestas de actualización de programas también se pueden incorporar a los planes del ciclo básico de las escuelas dependientes de la Dirección de Educación Artística y al primer año del plan de estudios no ciclado para las escuelas de Comercio.

3 | Se realizaron 8 reuniones para todas las materias de primer año con la participación de docentes de todas las regiones del Sistema Educativo de la Ciudad, de establecimientos dependientes de la Dirección de Educación Artística, la Dirección de Educación Media y Técnica y la Dirección General de Educación Superior. Se puso especial cuidado en garantizar que participaran de la actividad profesores de los distintos turnos para cubrir la variedad de situaciones institucionales. Durante esas reuniones se discutieron las versiones preliminares de los programas y se recogieron insumos para la elaboración de las versiones definitivas. También se trabajó en una muestra de 5 escuelas medias en tareas propias de un proceso de actualización curricular a nivel institucional.

2. LOS PROPÓSITOS FORMATIVOS QUE ENMARCAN LA ACTUALIZACIÓN CURRICULAR

Definir contenidos de enseñanza en un contexto complejo, de expansión del conocimiento científico y tecnológico, de planteo de nuevas demandas de formación a la escuela y de profundas transformaciones culturales, implica necesariamente un juicio y una toma de posición acerca de las finalidades formativas centrales del nivel secundario. En este sentido, se considera necesario fortalecer la idea de que el Ciclo Básico tiene por finalidad brindar a los adolescentes una sólida formación general que garantice el acceso a las principales formas culturales de la comunidad. A su vez, la formación general ofrece aquellos saberes y nociones fundamentales que le permitirán asumir plenamente el ejercicio informado y responsable de la ciudadanía, el abordaje reflexivo de los medios masivos de comunicación; la comprensión de las instituciones y el mundo contemporáneo y una actitud responsable con relación a los problemas ambientales, del consumidor y de la salud.

Este ciclo introduce a los estudiantes en el nivel secundario y está marcado además, por un fuerte carácter propedéutico, en tanto debe ofrecerles los conocimientos y formas de trabajo académico que garanticen una preparación adecuada para continuar el ciclo superior orientado u otros estudios ulteriores.

Desde el punto de vista formativo, los primeros años de la escuela media apuntarán fundamentalmente a:

- Ofrecer una selección de formas valiosas de la cultura que incluyan las humanidades, las artes y las ciencias, y promover la comprensión del carácter histórico, público y cambiante de estos tipos de conocimiento.
- Propiciar el establecimiento de relaciones basadas en el respeto y la tolerancia.
- Promover el cuidado de la salud personal y de los otros y del ambiente en que viven.
- Enseñar principios generales de valor y normas éticas.
- Ofrecer una normativa adecuada para la convivencia y el trabajo escolar y garantizar su cumplimiento.
- Transmitir el conocimiento de la normativa constitucional y de los principios y regulaciones de las instituciones republicanas y de la vida democrática.
- Ofrecer variedad de experiencias de aprendizaje en cuanto a organización de la tarea –grupal e individual– formas de estudio, ritmo, tipo de tarea, formas de acceso, materiales utilizados, etcétera.
- Ofrecer la posibilidad de que, en forma creciente, los alumnos realicen opciones con

respecto a formas de trabajo, administración del tiempo, actividades a realizar y áreas de conocimiento a profundizar en función de los propósitos planteados, sus intereses, el tiempo disponible, los materiales, etcétera.

- Ofrecer a los alumnos instancias de evaluación de su tarea, de la tarea de los demás y de su proceso de aprendizaje.
- Ofrecer experiencias que aproximen al alumno a diversos modos y procesos de trabajo (laboratorio, taller, huerta, periódico, etcétera).
- Ofrecer a los alumnos instancias de deliberación, toma de decisiones y asunción progresiva de responsabilidades.
- Promover el respeto por la tarea escolar y el desarrollo de hábitos de estudio y trabajo.
- Involucrar a los alumnos en actividades de valor social y promover el establecimiento de relaciones con otras instituciones del ámbito local como clubes, bibliotecas, centros culturales y deportivos, etcétera.
- Fomentar la cooperación entre alumnos en el marco de la resolución de tareas o de la realización de proyectos en común.
- Promover la comprensión de las instituciones sociales como producto de la acción humana.
- Promover el uso frecuente así como el cuidado de los materiales y equipamientos escolares (libros, mobiliario, computadoras, etcétera).
- Desarrollar en los alumnos la capacidad de modelizar situaciones y ofrecer las experiencias necesarias que permitan conceptualizar las características de los procesos de modelización.
- Proponer situaciones que ofrezcan la oportunidad de coordinar diferentes formas de representación, favoreciendo que los alumnos puedan usar unas como medio de producción y de control del trabajo sobre otras.
- Formar lectores que realicen múltiples recorridos de lectura, construyan interpretaciones propias de las obras que leen y aprecien las diversas formas de pensar la realidad que se plasman en el discurso literario.
- Dar oportunidad de explorar la potencialidad del lenguaje para la creación de mundos posibles, en la producción individual y colectiva de cuentos, ensayando formas personales de escritura.
- Crear condiciones que favorezcan el diálogo y el debate sobre problemáticas de la adolescencia actual, situaciones de la participación estudiantil en la gestión institucional y los problemas de la tarea y la convivencia escolar.

3. ¿QUÉ ES UN PROGRAMA OFICIAL?

La tradición curricular en el nivel medio se ha caracterizado por la definición de sucesivos planes de estudio. Estos planes varían en lo que se refiere al modo y grado de especificación de los contenidos de enseñanza de las diferentes asignaturas. Si bien es cierto que las escuelas y sus profesores han realizado distintos tipos de actualización de los contenidos en los últimos años, es necesario renovar formalmente los contenidos de la enseñanza en el marco de un trabajo que preserve los espacios históricos de autonomía decisional de profesores y escuelas.

La definición de programas oficiales procura asegurar a todos los estudiantes el derecho a acceder a distintos tipos de experiencias de aprendizaje valiosas para su formación y favorece el desarrollo del conocimiento, las habilidades y las actitudes necesarias para su crecimiento personal y social. También permite hacer explícitas las expectativas de aprendizaje a los propios alumnos, profesores, padres y público en general. Por último, la existencia de un marco de propósitos y contenidos comunes contribuye a dar coherencia y promover la continuidad del currículum entre los distintos niveles del Sistema facilitando, a su vez, el procedimiento para realizar pases de estudiantes entre escuelas.

Los nuevos programas de enseñanza fueron diseñados con la idea de posibilitar su adaptación a las particularidades de distintos contextos e instituciones y para habilitar el desarrollo de experiencias pedagógicas diversas por parte de escuelas y profesores en ese marco curricular. En función de las características de cada institución y de su población estudiantil y de las intenciones pedagógicas particulares de cada escuela, podrán definirse unidades de enseñanza, proyectos específicos, estimar tiempos, seleccionar materiales y seleccionar y/o construir instrumentos para la evaluación de los aprendizajes.

4. CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES DE LOS PROGRAMAS

Los programas de enseñanza que hoy llegan a las escuelas comparten una estructura similar, que está integrada por los siguientes componentes: fundamentación y propósitos de la asignatura, contenidos de enseñanza y objetivos de aprendizaje.

FUNDAMENTACIÓN Y PROPÓSITOS DE LA ASIGNATURA

El conjunto de los programas de enseñanza configura la oferta formativa global que los alumnos reciben en este tramo de la escolaridad. La fundamentación de cada programa expresa la importancia de la asignatura dentro del plan de estudios y el sentido que ésta tiene para el primer año del nivel medio. Expresa también el modo en que la materia contribuye a la formación general de los estudiantes.

Existen variadas formas de expresar las finalidades pedagógicas en una propuesta curricular. La formulación de propósitos constituye una de las alternativas posibles, que enfatiza las intenciones desde la perspectiva de quienes tienen responsabilidad sobre la enseñanza (Secretaría de Educación y demás organismos oficiales, escuelas y docentes).

Los propósitos se refieren a los rasgos generales de una propuesta de enseñanza, a aquel conjunto de condiciones, contextos y experiencias formativas que se espera ofrecer a los estudiantes con el cursado de una asignatura. La formulación de propósitos descansa en la enunciación de aquellos criterios o principios que orientan el armado del programa (el enfoque general de la materia, los ejes para seleccionar y organizar el contenido, etc.). Veámos algunos ejemplos:

Proponer situaciones en las que el trabajo cooperativo resulte relevante para la producción que se espera (PROGRAMA DE MATEMÁTICA).

Brindar oportunidades para que los alumnos sean partícipes activos de una comunidad de lectores, y desarrollen una postura estética frente a la obra literaria a través de la recreación y creación del mundo de ficción (PROGRAMA DE LENGUA Y LITERATURA).

Contribuir a la construcción de proyectos comunitarios o personales creativos y solidarios, a partir de procesos de formulación de preguntas, anticipaciones y conclusiones con fundamento argumental (PROGRAMA DE EDUCACIÓN CÍVICA).

En términos genéricos, los contenidos expresan aquellos saberes que serán objeto de enseñanza. Son contenidos tanto los conceptos y principios como las habilidades, las destrezas y modos de conocer propios de un campo, las prácticas y los valores.

Todos los programas definen una forma de organización o agrupamiento del contenido. Sin embargo, el criterio de organización varía según las asignaturas. En este sentido, es posible visualizar dos casos:

Por un lado, las asignaturas que organizan el contenido desde un determinado criterio –disciplinar y/o didáctico– destacando dimensiones o ejes del contenido. Tal es el caso de Lengua y Literatura, Educación Física y los Talleres de Educación Estética (Música, Plástica y Teatro). Corresponde al docente, en las instancias de planificación, armar las unidades de enseñanza y definir la secuencia para el curso. Tomaremos dos ejemplos de ese primer grupo de disciplinas:

Lengua y Literatura

El programa de Lengua y Literatura organiza los contenidos en un cuadro general en que se busca subrayar la prioridad y centralidad de las prácticas del lenguaje –prácticas de lectura, escritura y oralidad–, en las cuales se ponen en acción todos los contenidos lingüístico-discursivos que se desarrollan a lo largo del programa.

En el ejercicio de las prácticas, y a través de la reflexión, se intenta llevar a los alumnos a la conceptualización y sistematización de las herramientas gramaticales y ortográficas que, empleadas de forma competente, le habrán de ayudar a mejorar las propias prácticas.

El juego dialéctico de prácticas, reflexión y sistematización se establece como un continuum altamente recursivo, donde las prácticas constituyen siempre el punto de partida y el de llegada. La reflexión y la sistematización están a su servicio.

A lo largo del año, los docentes pueden elegir proyectos variados y actividades habituales que articulen distintas prácticas y distintos tipos de discursos, que permitan a los alumnos reflexionar sobre diversos aspectos del uso del lenguaje y avanzar hacia la apropiación de las herramientas de la lengua. Se propone realizar diversos recorridos didácticos que aseguren una articulación consistente entre prácticas, discursos, reflexión y sistematización de contenidos gramaticales y ortográficos. El trabajo con los contenidos de este programa no plantea, de modo alguno, el abordaje aislado y/o sucesivo de cada uno de ellos.

Teatro

El programa de Teatro organiza los contenidos en tres ejes que responden al quehacer disciplinar. Los ejes son: la producción, la apreciación y la contextualización. Esta presentación de los contenidos tiene por objetivo organizarlos según un criterio posible, pero en el armado de las unidades y/o proyectos de trabajo que el profesor planifique, será necesario contemplar siempre el entrecruzamiento de contenidos correspondientes a los tres ejes. Cada unidad de enseñanza o proyecto de trabajo deberá incluir contenidos del eje de la producción, de la apreciación y de la contextualización.

Por otro lado, las asignaturas cuyos programas plantean una definición de bloques/temas de contenidos. El profesor puede adoptar estos criterios de agrupamiento y de secuencia para su planificación o introducir las modificaciones que considere necesarias. Éste es el caso de Geografía, Biología, Educación Cívica e Historia. Tomaremos como ejemplo de este segundo grupo al programa de Geografía:

En Geografía los contenidos para primer año se organizan alrededor de tres bloques que son los siguientes:

- I. La diversidad ambiental en el mundo
- II. Los espacios urbanos y rurales
- III. Contenidos electivos (optativo)

A su vez, cada bloque está organizado en temas:

- I. La diversidad ambiental en el mundo
 1. La relación sociedad-naturaleza y la construcción de ambientes.
 2. Los ambientes, sus componentes y su dinámica.
 3. Problemáticas ambientales a diferentes escalas.
 4. Propuestas para un desarrollo sustentable.

El programa de Matemática presenta la particularidad de combinar ambos criterios: se organizan los bloques de contenidos teniendo en cuenta las dimensiones de

la disciplina; sin embargo, dentro de cada bloque los contenidos se agrupan en unidades de enseñanza. A su vez, el profesor tiene la tarea de alternar las unidades de los distintos bloques procurando una distribución equilibrada de los contenidos a lo largo del curso.

Los programas también incluyen una serie de comentarios u orientaciones para la enseñanza. En algunos casos, esas consideraciones aluden al contenido y plantean matices o describen más específicamente el tipo de recorte propuesto, las dimensiones a priorizar en la enseñanza, una somera justificación de la importancia del tema, ejemplos/formatos del tipo de problema o ejercicio en cuestión. En otros casos, los comentarios se refieren más centralmente al abordaje metodológico o los principios para la enseñanza de la asignatura.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Los objetivos establecen los logros esperables en términos de aprendizaje al finalizar el cursado de la asignatura. En este sentido, operan como criterios para la evaluación de los aprendizajes de los alumnos, más allá de las variaciones institucionales y personales que se puedan presentar a la hora de estructurar los contenidos y definir las estrategias de enseñanza. Definen el tipo de capacidades –en un determinado grado de complejidad– que se espera que los estudiantes desarrollen para los distintos aspectos que constituyen el contenido central de la materia.

Tomaremos algunos ejemplos que muestran cómo los objetivos de aprendizaje definidos en el programa operan como marco referencial para la evaluación y definen criterios de promoción de la asignatura:

"Caracterizar la organización de sociedades no estatales, teniendo en cuenta la división social del trabajo, las jefaturas y el papel del parentesco." (HISTORIA)

"Establecer relaciones pertinentes entre los conceptos de organismo autótrofo y heterótrofo con los de productores, consumidores y degradadores." (BIOLOGÍA)

"Anticipen situaciones tácticas de los juegos deportivos resolviendo problemas de movimiento." (EDUCACIÓN FÍSICA)

5. PROGRAMA, PROGRAMACIÓN INSTITUCIONAL Y PLANIFICACIÓN DOCENTE

Como se ha dicho, los programas definen, para el conjunto del sistema, los propósitos y contenidos centrales de las distintas asignaturas del Plan de Estudios y establecen parámetros comunes para la evaluación de los estudiantes. Si bien constituyen un marco genérico para la tarea del profesor, no son una propuesta de enseñanza en sentido estricto. El desarrollo y contextualización de los programas "en vistas a la enseñanza" requiere tomar una serie de decisiones que corresponden a las escuelas y a los profesores.

El proceso de programación comprende una serie de procedimientos y prácticas orientados a dar concreción a las intenciones pedagógicas planteadas al nivel de los programas oficiales y adecuarlas a la particularidad de las escuelas y situaciones docentes. Desde el punto de vista de la escuela, permite construir un conjunto de acuerdos y criterios básicos para organizar el trabajo escolar, facilitar la comunicación, coordinar diferentes acciones pedagógicas y posibilitar la evaluación y el seguimiento de la tarea.

Entendemos que la programación es parte constitutiva de la enseñanza y obedece a un principio de estructuración y regulación interna. Permite elaborar una hipótesis de trabajo que expresa las condiciones en las que se desarrollará la tarea, ofreciendo una especie de cartografía a la que es posible recurrir para buscar información, para reorientar el proceso o revisar la estrategia adoptada. Es cierto, no obstante, que la programación apunta a construir una representación anticipada del proceso y de cierto estado de cosas que pueden preverse sólo en parte: la práctica presenta espacios de indeterminación, situaciones y problemáticas que resulta imposible anticipar.

La articulación entre las intenciones generales expresadas en los programas y las situaciones particulares que tienen lugar en las escuelas implica un proceso que, por un lado, permite contextualizar la propuesta del programa oficial mediante su adaptación a los requerimientos y condiciones locales y, por otro, promueve un enriquecimiento del planteo curricular, al ser analizado a la luz de las ideas pedagógicas y los valores institucionales, y de los recursos formativos y culturales disponibles en la escuela y la comunidad.

Desde el punto de vista de quien enseña, supone un proceso de construcción personal o colectiva –cuando es llevada a cabo por equipos docentes– orientado a convertir una idea o un propósito en un curso de acción. De este modo, la programación define un espacio de interjuego entre las intenciones y los valores pedagógicos del profesor y las condiciones particulares de la tarea; entre la reflexión y la acción.

En síntesis, puede decirse que la planificación docente responde a tres necesidades básicas en relación con los procesos de enseñanza:

- función de regulación y orientación de la acción, en la medida en que se traza un curso de acción y se define una estrategia que permite reducir la incertidumbre y dar un marco visible a la tarea;
- función de análisis y justificación de la acción, en la medida en que permite otorgar racionalidad a la tarea y dar cuenta de los principios que orientan las decisiones;
- función de representación y comunicación, en la medida en que permite plasmar y hacer públicas las intenciones y decisiones pedagógicas en un plan, esquema o proyecto –que puede presentar grados de formalización variable.

En tanto la enseñanza es una acción personal y una práctica institucional, llevar a cabo su diseño en el contexto escolar requiere procesos de deliberación, construcción de acuerdos y coordinación de acciones. La tarea a desarrollar en la escuela con los programas –o a partir de ellos–, comprende dos tipos de ámbitos o dimensiones del desarrollo curricular.

En primer término, el ámbito institucional, en el que juega un papel decisivo el Equipo de Conducción. Se sugiere trabajar con un equipo de conducción "ampliado" que integre a asesores pedagógicos (si es que la escuela los tiene); coordinadores de proyectos de tutorías; jefes de departamentos de materias afines que trabajen en los primeros años del nivel; otros, que conformen un equipo de definición y seguimiento de cuestiones curriculares. Esta instancia culmina con la elaboración de un proyecto institucional en el que se fijan una serie de criterios compartidos acerca de los propósitos formativos de la escuela hacia sus estudiantes reales.

Es de central importancia reunir y analizar previamente información específica disponible en la escuela acerca de:

- características de la población estudiantil de la escuela (conformación de los grupos, heterogeneidad del alumnado, edad, características socioeconómicas y culturales, vinculación familia-escuela, índices de rendimiento académico de los últimos años);
- materiales y recursos para la enseñanza disponibles en la escuela y la comunidad;
- experiencias pedagógicas previas desarrolladas en la escuela que constituyan antecedentes de interés para el mejoramiento de la enseñanza de las diferentes materias;

- características del trabajo desarrollado a la fecha por los departamentos de materias afines;
- características del equipo docente de la institución.

Algunas de las tareas y decisiones centrales propias de este ámbito son:

- Organizar instancias de trabajo que permitan a los profesores elaborar y/o compartir criterios comunes acerca de los propósitos formativos, la selección de contenidos y los resultados de aprendizaje.
- Analizar la información relevada y disponible en la escuela para establecer prioridades en el proyecto curricular.
- Seleccionar y/o diseñar estrategias de abordaje de los nuevos programas, recuperando experiencias pedagógicas e institucionales.
- Elaborar el proyecto formativo institucional.

En segundo término, otro ámbito de trabajo institucional en el que juegan un papel decisivo los Departamentos de Materias Afines. Esta instancia culmina con la elaboración de un programa institucional para cada una de las materias del Plan de Estudios a partir del consenso acerca de los contenidos y resultados de aprendizaje a lograr por los estudiantes. Permite también visualizar y diseñar proyectos de trabajo compartido entre diferentes asignaturas del Plan de Estudios.

Las tareas y decisiones centrales propias de este ámbito son:

- realizar un análisis del programa oficial de la materia;
- revisar y contextualizar los propósitos de la enseñanza de la materia en función de las características propias de la escuela, sus necesidades, intereses y aspiraciones pedagógicas;
- recuperar información sistemática de los docentes tutores;
- determinar la secuencia general de contenidos de cada materia y definir las unidades de enseñanza o bloques temáticos⁴ y acordar los contenidos centrales correspon-

4 | Teniendo en cuenta las consideraciones planteadas en el punto 4.

dientes a cada una de las unidades, atendiendo a los límites establecidos por los objetivos y criterios de evaluación y promoción;

- realizar un seguimiento de la propuesta para su revisión y mejora;
- identificar posibles puntos de articulación entre asignaturas, basados en temas específicos (problemáticas o cuestiones abordadas desde más de una materia) o en modos de trabajo intelectual y de pensamiento genéricos (capacidades, habilidades y destrezas que pueden desarrollarse de modo coordinado y complementario desde diferentes asignaturas).

En esta instancia del trabajo institucional será de central importancia que el equipo docente cuente con la información institucional relevada y analizada por el equipo de conducción sobre características de la población estudiantil, materiales y recursos existentes en la escuela y en la comunidad, y experiencias pedagógicas previas desarrolladas en la escuela.

En tercer término, el ámbito del profesor, que consiste básicamente en la planificación del curso. Al planificar, los profesores, en forma individual o en equipos, elaboran distintos tipos de productos –planificaciones anuales, trimestrales o cuatrimestrales, de unidades, proyectos institucionales–, que difieren tanto en el grado de generalidad que poseen como en su alcance temporal. También las instituciones desarrollan sus propias formas de abordar esta tarea con los docentes y definen criterios para su presentación (frecuencia, grado de especificación, formato, etcétera).

Más allá de las variaciones institucionales y personales, el propósito central de esta tarea puede ser resumido del siguiente modo: diseñar, a partir del programa oficial, un conjunto de oportunidades –contextos y actividades– para que un grupo de estudiantes pueda tener encuentros fructíferos con determinados contenidos educativos a lo largo de un período de tiempo dado.

Las tareas y decisiones que esta instancia de trabajo involucra son:

- asignar tiempos para el desarrollo de las unidades, considerando la posibilidad de abordar algunos temas o capacidades específicas más de una vez en el tramo del curso;
- definir modos de abordaje del contenido de la materia, lo que implica analizar el sentido formativo y los propósitos, identificar dimensiones y núcleos centrales;

- plantear posibles perspectivas de tratamiento, desentrañar la trama de relaciones que el contenido implica y el contexto más general de sentidos, cuestiones y problemas en el que se inscribe, advertir relaciones con aprendizajes previos y/o futuros de la vida de los estudiantes;
- seleccionar y/o diseñar estrategias de enseñanza y actividades de aprendizaje para los alumnos, procurando diversificar al máximo la propuesta en función de los contenidos específicos y de las características y el progreso del grupo de estudiantes;
- intercambiar con el profesor tutor experiencias desarrolladas en el curso;
- explorar la posibilidad de introducir contenidos electivos para los estudiantes o facultativos del profesor que responda a intereses o preocupaciones específicas;
- seleccionar textos y demás materiales de enseñanza;
- elegir o diseñar instrumentos de evaluación del aprendizaje de los alumnos que provean información pertinente para plantear ajustes en el proceso de enseñanza.

También en este caso, es importante disponer de información para la toma de decisiones y la previsión de acciones. Especialmente aquella referida a:

- elementos diagnósticos sobre el curso (conceptos previos requeridos para encarar los aprendizajes de la materia, habilidades de estudio, rendimiento académico, necesidades, intereses, características socioculturales),
- información disponible acerca de materiales y recursos para la enseñanza en la escuela o en la comunidad,
- experiencia pedagógica previa del profesor o de sus colegas en la enseñanza de esa asignatura.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

INTRODUCCIÓN¹

El programa para primer año en el área fue elaborado teniendo como propósito fundamental lograr que la actividad matemática de las aulas constituya una práctica que contribuya a la formación intelectual y social de los jóvenes.

Una idea central –presente también en la propuesta curricular para las escuelas primaria de la Ciudad– orienta la formulación de este programa: un aspecto esencial de la actividad matemática con-

¹ | En esta introducción se realizan consideraciones sobre los contenidos para primer año y sobre la continuidad de los mismos en segundo año.

siste en construir un modelo matemático de la realidad (matemática o extra matemática) que se quiere estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Se trata de una idea general acerca de la disciplina que se irá fortaleciendo a través de un trabajo muy largo; pero resulta fundamental no perderla de vista a la hora de pensar la enseñanza de cada uno de los conceptos que se van a comunicar. La actividad de modelización matemática supone la toma de múltiples decisiones para enfrentar el problema que se está resolviendo: cuáles son las relaciones relevantes sobre las que se va a operar, cuáles son los símbolos que se van a utilizar para representarlas, cuáles son los elementos en los que apoyarse para aceptar la razonabilidad del modelo que se está usando, cuáles son las propiedades que justifican las operaciones que se realicen, cómo reinterpretar los resultados de esas operaciones en el problema...

El pasaje de la aritmética al álgebra y la entrada en el razonamiento deductivo, suponen transformaciones importantes para los alumnos que comienzan la escuela secundaria y tienen una fuerte presencia en distintos contenidos de este programa. Se trata de un trabajo que se inicia en primer año y que continúa en los años siguientes.

Los contenidos se han organizado en **tres bloques**: números, álgebra y funciones, y geometría. Se propone un desarrollo en el que se alternen unidades de los distintos bloques.

El **bloque números** abarca el estudio de los **números naturales, enteros y racionales** tanto en primero como en segundo año. Se trata de consolidar los conocimientos de los alumnos y de proponer nuevos aspectos del funcionamiento de los números.

Desde la escuela primaria los estudiantes vienen tratando con los **números naturales** como herramienta para contar colecciones. Presentar a los alumnos colecciones con distinta complejidad para contar permitirá una evolución de sus conocimientos sobre este tema. En **primer año** se propone un trabajo que involucra la **producción de fórmulas** para contar la cantidad de elementos de la iteración número n de un proceso que responde a una cierta regularidad y en **segundo año** se continúa con este trabajo y se incorporan **problemas de combinatoria**. Mirando los dos años en perspectiva, los alumnos deberían comprender que contar no se reduce a nombrar los números en serie y que las operaciones y las propiedades de los números naturales contribuyen a esa tarea.

Obtener fórmulas para contar los elementos de una colección –trabajo que comienza en primer año– permite poner en evidencia la estructura del algoritmo de cálculo subyacente y a la vez esto da sentido a un primer uso de la letra como variable y a un trabajo sobre las escrituras. El álgebra aparece como herramienta para tratar una cierta problemática y, al mismo tiempo, las distintas maneras de abordar un mismo problema dan sentido a la discusión sobre las equivalencias de las diferentes expresiones que lo representan.

Los problemas de combinatoria ofrecen la oportunidad de elaborar técnicas de conteo profundizando los sentidos de las operaciones aritméticas que los alumnos estudiaron en la escuela primaria.

Los **números enteros** se estudian por primera vez de manera sistemática en primer año y en segundo quedan subsumidos en el estudio de los números racionales.

Además de un trabajo sobre las operaciones y el orden con números enteros, se propone para primer año un trabajo sobre divisibilidad. Este campo es **especialmente propicio para la exploración, la formulación y la validación de conjeturas**, y acá vuelve a aparecer el álgebra como herramienta para producir conocimiento sobre este tema. Por ejemplo, si los alumnos deben decidir si la suma de cuatro enteros consecutivos es o no múltiplo de cuatro, podrán comenzar indagando y formulando conjeturas. Para escribir algebraicamente el problema deberán darse cuenta de que los cuatro números están relacionados $(n, n + 1, n + 2, n + 3)$ y finalmente deberán transformar la suma de las expresiones anteriores y llegar a $4n + 4 + 2$ o bien $4(n + 1) + 2$. Para concluir, deberán "leer" que la última expresión nunca puede ser múltiplo de 4. Se juega acá un aspecto central del álgebra elemental, que atraviesa todos los contenidos del programa.

El trabajo con **números racionales** comienza en **primer año** con la resolución de distintos tipos de problemas que requieren de las operaciones aritméticas. Las propiedades de las operaciones y el orden se estudiarán a partir de problemas que permitan analizar su funcionamiento. Se incorpora el estudio de la potenciación y la radicación en \mathcal{Q} . Se busca que los alumnos aprendan a distinguir entre el resultado exacto y aproximado de una cierta operación (por ejemplo, al hacer $1 : 3$ el visor de la calculadora muestra un resultado aproximado) y se propondrán situaciones que apunten a lograr un uso controlado de la calculadora.

Los alumnos deberán consolidar un sentido de "lo numérico" que se caracteriza, entre otros aspectos, por: la capacidad de estimar resultados sin realizarlos efectiva-

mente, de anticipar las operaciones necesarias para la resolución de un problema, de inventar estrategias alternativas para realizar cálculos mentales en función de los números que se utilizan, de conocer las razones por las que al multiplicar un decimal por una potencia de diez "se corre la coma" para un lado o para otro, de comprender por qué los desarrollos decimales de números racionales o son finitos o son periódicos, y poder anticipar si una cierta fracción admite desarrollo decimal finito o periódico, de transformar un cálculo en otro equivalente más sencillo, aplicando propiedades de las operaciones. Para consolidar y/o desarrollar estas capacidades, la calculadora será una herramienta esencial que estará presente en todo momento, salvo para algunas actividades puntuales con las que se quiera provocar alguna reflexión que quedaría inhibida por el uso de la misma.

Se analizará que la ecuación $X^2 = a$ no siempre tiene solución racional, se apelará a contextos geométricos para discutir la existencia de solución (por ejemplo, preguntar por la medida del lado de un cuadrado cuyo área es de 26 cm^2) y se promoverá la producción de algoritmos de aproximación a la solución (por ejemplo, encuadramientos sucesivos). En **segundo año** se consolida la noción de densidad acerca de la cual se fueron planteando aproximaciones el año anterior, se propone un trabajo sobre la aproximación decimal de un número racional, se introduce la noción de número irracional y se incorpora el concepto de probabilidad (definición clásica) y su relación con el de frecuencia relativa y porcentaje.

Como se dijo antes, en las unidades correspondientes a números naturales, enteros y racionales, se ha incluido el álgebra como herramienta para indagar, formular y demostrar propiedades de los números. Al hacer esta opción, se ha querido proponer un juego dialéctico entre lo numérico y lo algebraico, juego a través del cual los alumnos podrán aprender que la herramienta algebraica ofrece la posibilidad de profundizar el conocimiento de lo numérico y que la utilización de esta herramienta se apoya en los conocimientos sobre las propiedades de los números. Este juego exige un aprendizaje transversal que se irá adquiriendo a través de un proceso largo.

Las **funciones** y las **ecuaciones** son los contenidos principales del **bloque álgebra y funciones**. El álgebra —como ya se ha señalado— está presente en todo el programa como herramienta de modelización. La organización de contenidos que finalmente realice cada profesor deberá contemplar que en el momento en que se aborda una cierta unidad, estén disponibles las herramientas necesarias para hacer funcionar el álgebra con relación a los contenidos de dicha unidad.

En **primer año** se plantea una primera aproximación a las **funciones** a través del análisis de gráficos. Los alumnos deberán aprender a interpretar tanto la información que surge de una lectura directa de los gráficos como a obtener datos que requieren un análisis más profundo (por ejemplo, interpretar la "inclinación de una recta" en términos de la velocidad de crecimiento del proceso que representa). Se incluye además un trabajo de producción de gráficos que modelicen situaciones contextualizadas. Siempre que sea posible se incorporará el recurso informático para la producción de gráficos cartesianos. Se construirán gráficos aproximados a partir de tablas de valores y se explicitarán los supuestos que hacen posible esta construcción. Se presentarán funciones a través de fórmulas y se promoverán situaciones en las que los alumnos puedan anticipar información de un gráfico a partir del análisis de su correspondiente fórmula, e información de una relación algebraica a través del análisis de un gráfico que represente dicha relación. Este trabajo se sostiene y profundiza en **segundo año**. La entrada a funciones por medio de gráficos ofrece la posibilidad de tratar funciones más complejas que aquellas a las que se podría acceder usando fórmulas, teniendo en cuenta los conocimientos de los alumnos a esta altura de la escolaridad.

Las **funciones lineales** se abordan en los dos primeros años. En **primer año**, se parte de situaciones contextualizadas y se espera llegar a caracterizar los fenómenos lineales en términos de variación uniforme. La producción de fórmulas para describir procesos lineales se obtendrá como consecuencia de dicha caracterización. La proporcionalidad directa se analiza como caso particular de los procesos lineales. En **segundo año**, se retoma y profundiza este estudio, se analiza la ecuación de la recta –esto significa relacionar la forma "recta" con su ecuación–, y se interpreta el sentido que adquieren las cuestiones geométricas en diferentes contextos que se modelizan a través de las funciones lineales.

El estudio de las **ecuaciones lineales con una variable** se aborda en primer lugar en el contexto de la búsqueda de preimágenes de funciones lineales. En **primer año** sólo se exigirá a los estudiantes la resolución de ecuaciones lineales del tipo $ax + b = c$. **Ecuaciones más complejas** podrán ser tratadas por aproximaciones sucesivas, de forma gráfica o algebraicamente; sin embargo, **los conocimientos involucrados en estas tareas no formarán parte de las condiciones de acreditación para los alumnos**.

Como ya se ha mencionado, la manipulación de expresiones algebraicas están presentes en primer año al servicio del trabajo en el bloque **Números**.

Recién en **segundo año** se estudiarán de manera sistemática **ecuaciones lineales más complejas que exigen transformaciones algebraicas**. Estas ecuaciones surgirán en primer lugar respondiendo a la necesidad de hallar la intersección de dos funciones lineales y luego se propondrán otros tipos de problemas referidos a diferentes contextos. Esta opción permite que en un primer momento los estudiantes puedan coordinar la información que obtienen gráficamente con la que surge del tratamiento algebraico de la correspondiente ecuación, aprendiendo que un marco (ya sea el gráfico o el algebraico) puede actuar como control del otro.

Se propone para **segundo año** el tratamiento de **ecuaciones lineales con más de una variable** (dos y tres) y luego el estudio de **sistemas de ecuaciones lineales con dos variables**. Como producto del trabajo de los dos años, los alumnos deberán estar en condiciones de interpretar que una expresión del tipo de $y = aX + b$ puede representar la ecuación de una recta, una ecuación lineal con dos variables o una función lineal. Es decir, deben poder reconocer en una misma escritura los distintos aspectos de lo lineal que fueron estudiando en los dos años.

Mirando globalmente los contenidos de los programas para primero y segundo año se identifican distintas **funciones del álgebra** y se propone una enseñanza que apunte a ponerlas en juego: **el álgebra como instrumento para conocer propiedades sobre los números, para resolver problemas extramatemáticos en los que hay que reconocer una o más condiciones sobre una o más variables, para modelizar procesos a través de funciones y para representar relaciones geométricas**. Esto implica trabajar con diferentes objetos algebraicos, como funciones, ecuaciones, expresiones y fórmulas, y poner en juego distintos significados para las letras: variable, incógnita, número generalizado.

Para realizar este trabajo será necesario que los alumnos dispongan de una cierta destreza que se irá adquiriendo al mismo tiempo que se vayan poniendo en juego los diferentes usos del álgebra. **Una opción fundamental de este programa es no separar los aspectos algorítmicos del funcionamiento algebraico, del trabajo de modelización**. En otros términos, los alumnos irán aprendiendo a hacer las "cuentas" del álgebra a medida que las mismas sean necesarias para la resolución de problemas intra y extramatemáticos. Se considera que esta opción ofrece a los estudiantes mayores posibilidades de controlar los resultados de su producción.

Teniendo en cuenta los trabajos desarrollados en la escuela primaria, se propone en el bloque **Geometría** una profundización del estudio de las figuras, a través de distintas

actividades que impliquen la puesta en funcionamiento de propiedades como medio para anticipar y establecer ciertos resultados y la elaboración de nuevas propiedades, relaciones y conceptos.

El criterio general que se plantea es el de usar como "axiomas" las propiedades con las que los alumnos están muy familiarizados y considerarlas como punto de apoyo para deducir otras nuevas. Se trata de que los alumnos tengan la experiencia de deducir propiedades y no se propone en esta instancia la explicitación inicial de un sistema axiomático mínimo. Esto último tendría la ventaja de poner en primer plano un trabajo lógicamente correcto pero, al hacer necesaria la demostración de propiedades obvias para los alumnos, los alejaría de la posibilidad de comprender en profundidad el sentido de la demostración deductiva.

En **primer año**, se instalan los criterios de congruencia de triángulos a través de un trabajo con construcciones y luego estos criterios sirven de apoyo para deducir nuevas propiedades.

Las construcciones con regla y compás "a la Euclides" constituyen un campo especialmente propicio para realizar –vía la figura de análisis– anticipaciones que requieren un encadenamiento deductivo.

La relación pitagórica, estudiada como relación entre áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo y como relación entre la medida de sus lados, permitirá tratar con la existencia de números no racionales.

En **segundo año**, se incorpora al estudio del triángulo las alturas, medianas mediatrices y bisectrices. Sobre la base del estudio de sus puntos de intersección se plantea la construcción de círculos inscritos y circunscriptos a un triángulo. Todos estos elementos ampliarán las posibilidades de construcción de triángulos con regla no graduada y compás.

Se profundiza el estudio de la circunferencia incorporando las relaciones entre ángulos inscritos en arcos de circunferencia y sus correspondientes ángulos centrales. Estas relaciones serán punto de apoyo para la construcción de la recta tangente a una circunferencia por un punto dado.

El teorema de Thales constituye otro polo alrededor del cual se estructuran las nociones de semejanza y las razones trigonométricas.

El trabajo en torno al **razonamiento deductivo** se desarrolla a lo largo de todos los contenidos. Se sostiene el criterio de encontrar situaciones a través de las cuales los alumnos se vean en la necesidad de producir argumentos deductivos, apoyándose en los

conocimientos que ya poseen. Será necesario proponer problemas a través de los cuales quede clara la necesidad de ponerse de acuerdo respecto del uso de algunas reglas: varios ejemplos no son suficientes para probar la validez de una propiedad, un contraejemplo sirve para descartar la validez de una propiedad. El contraejemplo a la vez ofrece la posibilidad de analizar si la propiedad acerca de la cual se está discutiendo es válida en algún dominio, contribuyendo así a enriquecer el sentido de la misma: más interesante que decir que una propiedad no es verdadera es analizar bajo qué condiciones la misma es válida.

Los progresos en la producción de argumentos deductivos se conciben en el ámbito de las interacciones entre los alumnos y con el docente. Se buscarán condiciones que hagan propicio el debate en la clase acerca de la validez de diferentes proposiciones vinculadas a distintas áreas del conocimiento matemático. Se parte del supuesto que la necesidad de convencer a otros puede alentar a los alumnos a la producción de pruebas. Finalmente será necesario un trabajo didáctico para lograr que comprendan que la demostración es la forma de validar en matemática y de "estar seguro".

ACERCA DE LA ORGANIZACIÓN DE ESTE PROGRAMA

A continuación, se incluye:

- ▲ propósitos para la enseñanza de la matemática;
- ▲ contenidos para primer año, por bloques y por unidades dentro de cada bloque;
 - comentarios que precisan la intencionalidad que se persigue a través de la enseñanza de los contenidos de cada bloque;
- ▲ objetivos de aprendizaje para cada bloque, que serán considerados para la acreditación;
- ▲ anexo con problemas referidos a las distintas unidades de cada bloque.

PROPÓSITOS DE LA ENSEÑANZA

Se procurará:

- Transmitir a los alumnos la convicción de que la matemática es una cuestión de trabajo, estudio y perseverancia, y por lo tanto accesible a todos.
- Entender la diversidad como un aspecto inherente a la realidad de las aulas y organizar en consecuencia una enseñanza que abarque a todos los alumnos.
- Proponer situaciones en las que el trabajo cooperativo resulte relevante para la producción que se espera.
- Generar en el aula un ámbito en el que se valore la ayuda entre los compañeros, la aceptación del error, la descentración del propio punto de vista, la capacidad de escuchar al otro, la responsabilidad personal y grupal.
- Desarrollar en los alumnos la capacidad de modelizar situaciones, ofrecer las experiencias necesarias que permitan conceptualizar las características de los procesos de modelización y promover un tipo de trabajo que lleve a los estudiantes a concebir la modelización como un aspecto fundamental de la actividad matemática.
- Permitir a los alumnos transitar la ruptura que supone el pasaje de prácticas aritméticas a prácticas algebraicas favoreciendo, a través de las situaciones propuestas, que los alumnos puedan:
 - concebir los límites de los conocimientos aritméticos para abordar ciertos problemas pero que al mismo tiempo puedan
 - recuperar los antiguos conocimientos aritméticos y usarlos como punto de apoyo.
- Proponer una enseñanza que se plantee como objetivo que los alumnos puedan tratar con lo general brindando la oportunidad de:
 - conjeturar propiedades sobre conjuntos infinitos;
 - explorar la validez de las afirmaciones que se realicen y validarlas a partir de los conocimientos que se posean;
 - determinar el dominio de validez de una afirmación.
- Proponer situaciones que ofrezcan la oportunidad de coordinar diferentes formas de representación, favoreciendo que los alumnos puedan usar unas como medio de producción y de control del trabajo sobre otras.
- Generar condiciones que permitan a los alumnos entrar en prácticas de argumenta-

ción basadas en conocimiento matemático, acercándose a la demostración deductiva, modo de validación de las afirmaciones en la matemática.

ORGANIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS

NÚMEROS

UNIDAD 1: NÚMEROS NATURALES

► **Producción y validación de fórmulas en N . Elaboración de fórmulas para calcular el paso n de un proceso que cumple una cierta regularidad** (suma de los n primeros números naturales, cálculo de la cantidad de elementos de una cierta configuración geométrica, etc.). **Equivalencia de las diferentes escrituras de una fórmula: validación a través de las propiedades de las operaciones aritméticas. El contexto geométrico como apoyo posible para validar la equivalencia de diferentes escrituras. Transformaciones de expresiones algebraicas sencillas en otras equivalentes.**

COMENTARIOS

Se alentará a los alumnos a buscar regularidades que les permitan encontrar fórmulas y a producir argumentos para validar las mismas. No se espera que el docente "enseñe" las fórmulas y los alumnos la "apliquen" sino que los alumnos tengan la oportunidad de ensayar, conjeturar y validar sus propuestas. Se piensa en problemas que, al admitir distintas maneras de ser abordados, conduzcan a la producción de diferentes escrituras para representar el mismo proceso. Se considera esta diversidad como punto de apoyo para trabajar sobre la equivalencia entre expresiones. (En el anexo se propone el ejemplo 1.)

NÚMEROS

UNIDAD 2: NÚMEROS ENTEROS

2.1

► **Números enteros a partir de la resta de números naturales. Representación de números enteros en la recta numérica. Adición y sustracción en \mathbb{Z} . Diferentes contextos como apoyo para otorgar significación a las operaciones (juegos de cartas, temperaturas sobre cero y bajo cero, pérdidas y ganancias, etc.). La relación de orden entre dos números enteros a partir de su ubicación en la recta. Multiplicación de números enteros: la conservación de la propiedad distributiva en \mathbb{Z} como punto de apoyo para la introducción de la "regla de los signos". La recta como contexto de apoyo para estudiar las relaciones entre adición, multiplicación y orden (ubicación en la recta de $-1 \cdot a$ respecto de a , y en general el "efecto en la recta" de multiplicar por números negativos, la conservación del orden a través de la suma, etc.). Resolución de cálculos combinados usando la calculadora. Análisis del funcionamiento de los distintos tipos de calculadora: común, científica.**

2.2

► **Divisibilidad en \mathbb{Z} .**

Las nociones de múltiplo y divisor. Análisis de la estructura de un cálculo para decidir cuestiones de divisibilidad con números naturales y enteros. Lectura de informaciones en una expresión algebraica ($5n + 1$, no es múltiplo de 5, etc.). La noción de número primo.

Formulación y validación de conjeturas que involucran las operaciones y el orden en \mathbb{Z} .

COMENTARIOS

Los diferentes contextos se conciben como punto de apoyo para otorgar una primera significación a algunas de las operaciones en el conjunto de números enteros, que luego se irán formalizando. Sin embargo, el trabajo en contexto tiene algunas limitaciones: por

ejemplo, en el juego de chin chón es difícil interpretar la resta entre dos negativos. En general los contextos de afuera de la matemática no permiten buenas interpretaciones de la multiplicación. Adquieren entonces relevancia los contextos de dentro de la matemática. Por ejemplo, la conservación de la propiedad distributiva se propone como punto de apoyo para la introducción de la regla de los signos.

El trabajo de la relación de orden en Z incluye la comparación con lo que sucede en naturales: algunas propiedades se mantienen y otras se pierden. Por ejemplo, en naturales, los alumnos saben que un número a es mayor que otro número b si a se encuentra a la derecha de b y también si está más alejado del cero que b . Es importante analizar con los alumnos que una de estas propiedades sigue valiendo y otra deja de valer en el caso de los números enteros.

Para estudiar las relaciones entre orden y operaciones se propone utilizar la recta: si $a < b$ estudiar la ubicación en la recta de $a + c$ y $b + c$ y de $a \cdot c$ y $b \cdot c$ para valores positivos y negativos de c .

A medida que se va trabajando con los números enteros y sus operaciones, interesa abordar de manera simultánea el trabajo algebraico ya iniciado en el campo de los números naturales.

Respecto a los cálculos combinados, interesa centrar la atención en la jerarquización de las operaciones y el uso del paréntesis para resolver diferentes problemáticas (expresar un enunciado mediante un único cálculo, introducir un cálculo en una calculadora que no separa en términos, etc.). No se trata de resolver ejercicios de "suprimir paréntesis", desligados de problemas que justifiquen dicha supresión. (Ver los ejemplos 2, 3, 4, 5, 6 y 7 del anexo.)

El trabajo con el concepto de divisibilidad busca, en primer lugar, recuperar las conceptualizaciones alcanzadas con relación a múltiplos y divisores con números naturales abordadas en la escuela primaria, pudiendo extender a los enteros las características más trascendentes. También se trata de introducir el álgebra como herramienta para conocer propiedades de las operaciones. Los problemas que se presenten a los alumnos podrán exigir la puesta en juego de algunas marcas del trabajo algebraico enunciadas en los puntos anteriores. (Ver los ejemplos 8, 9 y 10 del anexo.)

Se incluye en este año el planteo de problemas que exijan recurrir al uso de letras para representar la situación, transformar la expresión e interpretar la información en la expresión trabajada en el contexto de los números enteros para que los alumnos den sentido al álgebra como herramienta de modelización. (Ver los ejemplos 11 y 12 del anexo.)

NÚMEROS

UNIDAD 3: NÚMEROS RACIONALES

3.1

► Problemas que requieren una o varias de las cuatro operaciones elementales entre números racionales. Relación entre escritura fraccionaria y escritura decimal: fracciones con escritura decimal finita y números periódicos.

3.2.

► Operaciones aritméticas y expresiones algebraicas. Formulación y validación de conjeturas que involucren las operaciones y el orden en \mathcal{Q} . La manipulación algebraica como un recurso para decidir sobre la validez de propiedades numéricas. Las propiedades de las operaciones numéricas como recurso para encontrar el rango de valores en los que se cumplen igualdades o desigualdades.

3.3

► Potenciación y radicación en \mathcal{Q} .

Potencias de exponente natural. Potenciación y orden. Producción del gráfico aproximado de las funciones X , X^2 , X^3 , X^n a partir de algunos valores y las propiedades de la potenciación. Operaciones con potencias.

Exploración de la solución de la ecuación $X^2 = a$ para diferentes valores de a racional. La tecla $\sqrt{\quad}$ de la calculadora. Valor aproximado de una raíz cuadrada: existencia de números irracionales. Radicación y orden. La función $\sqrt{\quad} X$: producción del gráfico aproximado. Radicación y potenciación como funciones inversas.

COMENTARIOS

La presencia masiva de calculadoras en la sociedad actual ha hecho que los objetivos exclusivamente centrados en la práctica de mecanismos para obtener el resultado de las

operaciones pierdan sentido. Es por eso que los históricos ejercicios de cálculo combinando diferentes operaciones desaparecen de la propuesta. Las cuestiones algorítmicas serán subsidiarias de problemas que apunten a algún aspecto conceptual.

Los problemas que exigen coordinar escrituras fraccionarias con escrituras decimales llevan a profundizar el concepto de número racional. Se espera que sean los alumnos quienes establezcan las condiciones para que la escritura decimal de una fracción sea periódica o finita. Esto supone el planteo de problemas específicos que apunten a esta cuestión. Se excluyen de este programa los ejercicios de transformación de expresiones decimales periódicas a fracción a través de la aplicación de una regla que los alumnos recitan sin comprender. (Ver el ejemplo 13 del anexo.)

La comparación entre el funcionamiento de los naturales y de los racionales a propósito de las operaciones y de la relación de orden será también objeto de trabajo en este año. El trabajo central en esta unidad es de consolidación y ampliación del campo de problemas en los que son utilizados los números racionales. En este nivel de la escolaridad se propone el estudio de las propiedades de las operaciones y del orden en Q como extensión de Z y apoyándose en ellas se trata de elaborar nuevas propiedades. Se retoma la densidad de los racionales como conjunto, noción que ya se ha trabajado en años anteriores. Se propone trabajar la distinción entre valor exacto y aproximado de una raíz y se incorpora la idea de número irracional usando la calculadora para determinar el valor aproximado de la diagonal de un cuadrado. (Ver el ejemplo 14 del anexo.)

Se pretende que los alumnos profundicen sus conceptualizaciones acerca de las propiedades de las operaciones y de las relaciones de orden, que se apoyen en estas propiedades para analizar el comportamiento de diferentes expresiones algebraicas y que utilicen recursos algebraicos para tomar decisiones respecto de la validez de ciertas propiedades. (Ver los ejemplos 15 y 16 del anexo.)

Para abordar el trabajo con expresiones algebraicas se toman en cuenta los mismos criterios planteados para números enteros. Se propone la utilización de las propiedades de los números racionales como recurso para encontrar los valores que verifican una igualdad o desigualdad. En este punto no se piensa en la resolución de ecuaciones o inecuaciones vía pasaje de términos sino en un análisis más global de las expresiones que permita anticipar los valores que van tomando en función de los valores que toma la variable. Por otro lado, la manipulación algebraica es un recurso para decidir sobre la validez de propiedades numéricas. (Ver el ejemplo 17 del anexo.)

Se propone entrar al estudio de la potenciación a partir de gráficos cartesianos como soporte para estudiar el comportamiento de las variables en juego. Construir los gráficos aproximados de las funciones X , X^2 , X^3 , X^n a partir de algunos valores y apoyarse en el gráfico para hacer un análisis de las propiedades de la potenciación permite el estudio de esta operación en un marco distinto del numérico. Por ejemplo, los gráficos de las funciones X^2 , X^4 y X^6 son simétricos respecto del eje y están por "encima" del eje X mientras que para las potencias de grado impar se obtienen gráficos simétricos respecto del origen. El estudio comparativo de todas estas funciones servirá también para discutir relaciones del estilo: si $0 < a < 1$, $a^2 > a^3$. (Ver los ejemplos 18 y 19 del anexo.)

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DEL BLOQUE NÚMEROS

El trabajo en torno a este bloque deberá generar condiciones para que los alumnos puedan:

- Utilizar las propiedades de los números para
 - leer en una fórmula información relevante para el problema que se está tratando;
 - transformar una expresión algebraica en otra equivalente que permita obtener nueva información;
 - reconocer la equivalencia entre diferentes fórmulas.
- Consolidar en los alumnos un sentido de lo numérico que incluya la posibilidad de estimar resultados sin realizarlos efectivamente, justificar algoritmos alternativos, transformar un cálculo en otro equivalente más sencillo vía propiedades de las operaciones.
- Utilizar recursos algebraicos para decidir sobre la validez de propiedades numéricas.
- Reconocer la necesidad de acordar reglas para decidir acerca de la validez de ciertas afirmaciones: varios ejemplos no validan una afirmación, un contraejemplo invalida una regla.
- Desplegar argumentos basados en los conceptos trabajados para validar las respuestas que produzcan.
- Reconocer la necesidad de establecer convenciones para la escritura y la interpretación de cálculos que combinan varias operaciones, como también las convenciones en diferentes instrumentos de cálculo (calculadora común, científica, etcétera).

- Comprender el funcionamiento de la potencia y la raíz a través de:
 - la utilización de las propiedades,
 - el estudio de sus gráficas,
 - el uso de diferentes tipos de calculadoras.

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

UNIDAD 1: APROXIMACIÓN A LAS FUNCIONES A TRAVÉS DE LOS GRÁFICOS

- ▶ Interpretación y producción de gráficos cartesianos que representan situaciones contextualizadas. Problemas que impliquen lecturas directas de los gráficos. Problemas que requieran de inferencias de información a partir de la lectura del gráfico.
- ▶ Interpretación y análisis, a través de los gráficos, de aspectos de la situación que éstos representan. Identificación de las variables que se relacionan y análisis de la variación de una, en función de la otra. Diferencias en la representación gráfica de diferentes formas de variación (variación uniforme, constante, etcétera).
- ▶ Análisis y explicitación de condiciones de una situación, que hacen posible anticipaciones, interpolaciones, extracción de información referida a otras variables.
- ▶ Limitaciones de los gráficos para representar un fenómeno en tanto muestran sólo algunos aspectos de la realidad que se representa. Análisis de las cuestiones del fenómeno representado que no pueden conocerse a partir de la lectura del gráfico.
- ▶ Funciones dadas por tablas de valores. La relación entre tabla y gráfico cartesiano para situaciones de dominio continuo y dominio discreto. Coordenadas en el plano cartesiano. Representación gráfica de zonas del plano cartesiano que cumplen cierta condición (pares (x,y) que cumplen $x + y = 5$; pares (x,y) que cumplen que $x = 3$, etc.). Funciones que pueden expresarse mediante una fórmula. El cálculo de valores a través de la fórmula. Relación entre fórmula y representación gráfica.

- ▶ **Procesos dados en diferentes registros de representación: lenguaje coloquial, fórmulas algebraicas, tablas, gráficos. Comparación de las formas de representación en relación con las ventajas de cada una de ellas.**
- ▶ **Imagen inversa de un punto y problemas de encuentro usando como apoyo las representaciones gráficas. Aproximación gráfica a la solución de ecuaciones que surgen de problemas de encuentro.**

COMENTARIOS

Se propone una aproximación al estudio de funciones sin "pasar" por relaciones entre conjuntos finitos, privilegiando una entrada a partir de los gráficos como soporte para estudiar el comportamiento de las variables en juego. La resolución de problemas vinculados a procesos a partir de las representaciones gráficas precederá cualquier definición formal del concepto de función.

Los gráficos permiten manipular ciertas ideas referidas a conceptos que no están completamente definidos (por ejemplo, la noción de crecimiento, extremos, etc.) y pueden dar lugar a un análisis cualitativo de los procesos que representan.

Las primeras interacciones con los gráficos estarán destinadas a aprender las convenciones de la representación cartesiana y –lógicamente– los primeros problemas se centrarán en la interpretación de la información más evidente. Sin embargo, se propone desde el comienzo el planteo de problemas que exijan un análisis global más allá de la lectura punto a punto. Este análisis global debe comprender, entre otras cuestiones:

- la explicitación de condiciones sobre el proceso que se estudia, que permitan hacer interpolaciones y extrapolaciones a partir del gráfico;
- el análisis del comportamiento de otras variables que no están representadas en el gráfico pero acerca de las cuales se puede obtener información a partir del mismo;
- la comparación de la velocidad de crecimiento de diferentes procesos correspondientes a una misma situación, lineal o no;
- la comparación de la velocidad de crecimiento de un proceso en diferentes intervalos.

Se propone una primera aproximación al trabajo con fórmulas. Las funciones que se representen a través de fórmulas serán necesariamente más sencillas que las dadas a través de gráficos. Se podrá "aprovechar" para tratar acá algunas de las fórmulas trabajadas

en la unidad 1 del bloque Números, dando esta vez un tratamiento más funcional a la fórmula e incorporando la representación gráfica. Una manera de provocar la coordinación entre las representaciones "fórmula" y "gráfico" puede ser proponer a los alumnos que elijan entre varios gráficos, el que corresponda a una fórmula dada y viceversa. Un análisis más fino de fórmulas se realizará sólo para funciones lineales. (Ver unidad 2, de este bloque.)

El inicio a ecuaciones se plantea a partir de funciones y el cálculo de la imagen inversa de un valor del dominio. Se proponen los problemas de encuentro como un medio fértil para abordar el estudio de las ecuaciones. Se trata de que los alumnos aproximen las soluciones por medio de la lectura de los puntos de intersección de rectas en el registro de los gráficos cartesianos.

Asimismo se propiciará un trabajo que permita interactuar con diferentes formas de representación, siendo cada una de ellas una herramienta del trabajo del alumno para tomar decisiones respecto del problema que debe resolver. La tarea de elegir la forma de representación más adecuada en función de la tarea a enfrentar será parte fundamental de este trabajo.

Para todo el trabajo de introducción a las funciones se pueden ver los ejemplos 20, 21, 22 y 23 del anexo.

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

UNIDAD 2: FUNCIONES LINEALES

- ▶ **Análisis de procesos que crecen o decrecen uniformemente. Procesos lineales discretos y procesos continuos; fórmula para describirlos. Definición de funciones lineales. La noción de pendiente asociada a los distintos fenómenos que describen las funciones.**
- ▶ **Representación gráfica de las funciones que corresponden a procesos de crecimiento lineal. La noción de pendiente en el gráfico de las funciones.**
- ▶ **Diferenciación entre crecimiento directamente proporcional y crecimiento lineal pero no proporcional. Situaciones que conlleven a funciones de proporcionalidad**

directa: dominio e imagen que se refieren a magnitudes de la misma "especie" y de diferente especie. El problema de las unidades de medida. Escala y porcentaje. Representación cartesiana. Uso de fórmulas. Propiedades de la proporcionalidad directa.

► Tablas de funciones lineales y de funciones de proporcionalidad. Problemas que requieran reconocer y completar tablas. La pendiente y la constante de proporcionalidad en una tabla de valores.

► Imagen inversa de un punto y problemas de encuentro de funciones lineales usando como apoyo las representaciones gráficas. Aproximación gráfica a la solución de ecuaciones lineales con una variable que surgen de problemas de encuentro. Solución de ecuaciones simples de primer grado con una incógnita, de la forma $aX + b = c$.

COMENTARIOS

Se trata de caracterizar los fenómenos lineales mediante un análisis comparativo de diferentes problemas, algunos de ellos que describan procesos de crecimiento uniforme y otros que no. Posteriormente se buscará expresar dichos fenómenos por fórmulas lineales en la variable independiente, del tipo $f(x) = ax + b$, donde a y b son dos números reales cualesquiera e interpretar dichos parámetros en función del contexto de trabajo. La fórmula correspondiente a una determinada situación será estudiada como una "síntesis" de la situación que permite representarla y obtener diferentes pares de valores. Debe hacerse énfasis en que la fórmula supone una cierta elección de unidades para las magnitudes que se relacionan y que la misma situación con otra elección de unidades "llevaría" a una fórmula diferente. Se discutirán las informaciones que cada uno de los registros proporciona: por ejemplo, una tabla de valores es finita y por sí misma no garantiza nada acerca del comportamiento de la función para valores que no se encuentran tabulados. Se trata de trabajar con situaciones que permitan identificar globalmente las características del gráfico de las funciones lineales, haciendo corresponder el crecimiento uniforme con el dibujo de una recta y separando esto de otros tipos de gráficos posibles.

La proporcionalidad directa será estudiada como caso particular de la función lineal. Se trabajarán diferentes situaciones de proporcionalidad directa en las que se vinculan magnitudes de la misma naturaleza (escalas, porcentajes) y de diferente naturaleza (den-

sidad, velocidad, etc.). A través de los problemas se propondrán distintos tipos de tareas: hallar elementos del conjunto de llegada, hallar elementos del conjunto de partida; hallar la constante de proporcionalidad dados uno o varios pares que se corresponden, comparar dos situaciones de proporcionalidad que vinculan el mismo tipo de magnitudes estando éstas expresadas en las mismas o en distintas unidades; obtener la fórmula a partir de varios pares de elementos que se corresponden, obtener la fórmula a partir de un único par de elementos que se corresponden y la información de que se trata de una situación de proporcionalidad directa, decidir si una relación dada es de proporcionalidad directa, identificando las condiciones que llevan a tomar la decisión.

En este año se propondrán problemas en los que el gráfico sea una herramienta necesaria para la solución; estos gráficos darán lugar, en un segundo momento, a un análisis cualitativo de los procesos que representan, constituyéndose en objetos de estudio en sí mismos.

En primer año el énfasis está puesto en situaciones contextualizadas. Formulas, gráficos y tablas corresponden siempre a distintos procesos. El abordaje de fórmulas gráficos y tablas de funciones lineales descontextualizadas se presenta en segundo año, dando lugar al estudio de la ecuación de la recta y, en general, de la ecuación lineal con dos variables.

El tema de la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita comienza en primer año pero se aborda en toda su complejidad recién en segundo. Para este primer abordaje se propone la representación gráfica de la o las situaciones involucradas como herramienta para la obtención de una solución aproximada. Algebraicamente se espera que los alumnos puedan resolver ecuaciones sencillas.

(Ver dos problemas de funciones lineales en los ejemplos 24 y 25 del anexo.)

Las distintas entradas a lo algebraico que propone este programa se configuran entonces:

- con el trabajo hecho de producción de fórmulas en N (unidad 1 del bloque Números),
- con el manejo de expresiones algebraicas al servicio de conjeturar y probar propiedades de los números enteros y racionales (unidades 2 y 3 del bloque Números),
- con el trabajo global realizado con funciones, sus gráficos y sus fórmulas (unidad 1 del bloque Álgebra y Funciones), que permite tanto el estudio de expresiones algebraicas y métodos de cálculo como una aproximación a la noción de ecuación,
- con el trabajo más detallado de funciones lineales y una aproximación al tratamiento algebraico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita (unidad 2 del bloque Álgebra y Funciones).

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DEL BLOQUE ÁLGEBRA Y FUNCIONES

El trabajo en torno a este bloque deberá generar condiciones para que los alumnos puedan:

- Realizar un tratamiento con gráficos que contemple:
 - el análisis de condiciones que hacen posible anticipaciones, interpolaciones, extracción de información referida a otras variables, etcétera.
 - la obtención del gráfico de otro proceso a partir de un gráfico dado;
 - la comparación de distintos gráficos que representen situaciones del mismo tipo;
 - la diferenciación entre representaciones de tipo icónico y representaciones cartesianas.
- Identificar los problemas en los que la representación cartesiana aporta elementos de economía respecto de otras representaciones.
- Coordinar informaciones sobre un proceso, dadas en diferentes registros de representación (verbal, la fórmula que lo modeliza, la tabla de valores, la representación gráfica), y analizar las ventajas o desventajas de cada uno de ellos con relación a la facilidad de la lectura de ciertos aspectos del fenómeno considerado y la posibilidad de transformar la información de un registro a otro si así lo requiere la tarea.
- Establecer diferencias y similitudes entre la función lineal y la de proporcionalidad directa.
- Comprender el concepto de pendiente e identificar su significado en los gráficos y en los diferentes contextos.
- Realizar un tratamiento con las ecuaciones que comprenda:
 - la noción de ecuación como restricción que se impone sobre un cierto conjunto numérico y que tiene asociada un conjunto solución;
 - el recurso de reemplazar en una ecuación para verificar si cierto número es solución de la ecuación;
 - la coordinación entre resolución gráfica y algebraica.

GEOMETRÍA

UNIDAD 1: CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS Y APLICACIONES

- ▶ **Construcción de triángulos dados dos y tres elementos. Discusión sobre la existencia y unicidad de la construcción. Elaboración de criterios para decidir sobre la congruencia de triángulos. Problemas de exploración, formulación y validación de conjeturas sobre la base de los criterios de congruencia de triángulos. Construcciones de triángulos en casos especiales: rectángulo, isósceles, equilátero.**
- ▶ **Construcción de paralelogramos a partir de distintos elementos: lados, ángulos, diagonales y alturas. Explicitación de las propiedades que fundamentan las construcciones. Estudio de la congruencia entre pares de ángulos determinados por dos paralelas y una transversal, a partir de las propiedades del paralelogramo.**
- ▶ **Discusión de posibles "criterios de congruencia" para cuadriláteros y comparación con los criterios construidos para triángulos. Construcción de cuadriláteros dados tres o cuatro elementos.**

GEOMETRÍA

UNIDAD 2: CONSTRUCCIONES CON REGLA NO GRADUADA Y COMPÁS

- ▶ **La mediatriz de un segmento, propiedades y construcción. Rectas paralelas y perpendiculares. Construcción de ángulos congruentes y de la bisectriz de un ángulo. Construcción de polígonos con regla no graduada y compás. Condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones. El caso particular de los cuadriláteros.**

GEOMETRÍA

UNIDAD 3: TEOREMA DE PITÁGORAS Y APLICACIONES

- ▶ El teorema para un triángulo rectángulo isósceles: relación entre el área de un cuadrado y el área del cuadrado construido sobre su diagonal. Relación entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo isósceles: existencia de números no racionales.
- ▶ Relación entre los lados y la diagonal de un rectángulo. El caso general del teorema de Pitágoras. Problemas que se resuelven vía la relación de Pitágoras.
- ▶ Distancia entre dos puntos en el plano coordenado. Ecuación de la circunferencia.

COMENTARIOS

El trabajo a través de las distintas unidades del bloque se desplegará a partir de dos tipos fundamentales de actividades: las actividades de construcción y las actividades de exploración, formulación y validación de conjeturas. Estas actividades no suponen capacidades totalmente diferentes; en ambas el desarrollo de las argumentaciones cobra un rol fundamental.

Es importante señalar que, teniendo como objetivo la producción por parte de los alumnos de argumentaciones deductivas, se deberán aceptar algunas "primeras propiedades" como verdaderas, para posibilitar la elaboración de los argumentos que permitirán establecer el carácter necesario de otras. Pero en esta propuesta no se plantea la explicitación inicial de ese conjunto de propiedades (que serían los **axiomas** de la teoría). Como se ha señalado en la introducción se prioriza el criterio de que los alumnos tengan la experiencia de establecer relaciones a través de la deducción y de no insistir en demostrar propiedades que, por ser muy familiares para los alumnos, resultan obvias para ellos. De este opción resultará un conjunto de propiedades de partida mucho más amplio que el que conforma un sistema axiomático "mínimo".

La conformación del conjunto inicial de propiedades "de partida" es compleja y tiene un cierto grado de arbitrariedad. No es intención de este documento definir desde el programa de manera absoluta cuáles son las propiedades a aceptar y cuáles deberán demos-

trarse, puesto que estas decisiones dependerán básicamente del tipo de problemas que se desarrollen y de los conocimientos geométricos de los alumnos. Se señalan sin embargo algunos criterios de selección de estas propiedades a tomar como "punto de partida de las argumentaciones":

1. Las propiedades que los alumnos ya conocen y con las cuales están familiarizados, seguramente a partir del trabajo en años anteriores.
2. Aquellas que tienen cierto grado de "evidencia". Por ejemplo, "la diagonal de un rectángulo divide al mismo en dos triángulos iguales". (Las comillas hacen referencia a que la evidencia es relativa a cada sujeto.)
3. Aquellas propiedades que no puedan considerarse "evidentes" ni conocidas pero que resultan "fundamentales" para avanzar en el desarrollo de prácticas geométricas como las señaladas y cuya demostración implicaría una comprensión profunda de una estructura axiomática que no se plantea para primer año. Por ejemplo, los criterios de igualdad de triángulos, que se proponen construir a partir de un conjunto de actividades de construcciones geométricas y se aceptan sin una justificación rigurosa. (Las comillas, en este caso, se refieren a que el carácter fundamental dependerá del tipo de problemas que se pretendan resolver.) (Ver el ejemplo más desarrollado en el número 27 del anexo.)

Que estas propiedades primeras sean aceptadas como punto de partida no significa que serán enunciadas por los docentes, sin ningún tipo de actividad por parte de los alumnos. Por el contrario, se concibe que es necesario proponer actividades de experimentación, análisis de dibujos particulares y construcciones, que permitan ponerlas en la escena.

Como se dijo antes, las actividades de **construcción de triángulos** (ver los casos del ejemplo 27 del anexo) tienen por objeto la producción de nuevas propiedades de las figuras que serán necesarias para las argumentaciones posteriores. También cumplen un rol importante como actividades del comienzo del trabajo en geometría en esta etapa. Para ello, la manipulación con los instrumentos para la realización de los dibujos debe ir acompañada de un cierto grado de anticipación que tendrá que ver con los conocimientos que traen los alumnos. Las instancias de trabajo grupal y puesta en común colectiva pueden ayudar a que estos conocimientos se verbalicen y se discutan.

Para las primeras construcciones de la unidad 1 que apuntan a la puesta en escena de criterios de congruencia de triángulos, está previsto el uso de regla graduada y transpor-

tador. Esto significa que en un primer momento la medición es un criterio válido para construir ángulos y segmentos congruentes.

Para las respuestas sobre existencia y unicidad de la solución en los distintos casos de congruencias que se estudian en la unidad 1, se esperan justificaciones muy precarias, basadas tanto en la visualización como en la intuición. Si bien el objetivo al que se apunta en el ciclo es la entrada en el razonamiento deductivo, no hay que perder de vista que esto es un proceso y que será necesario el tránsito por toda una colección de actividades para lograrlo.

El enunciado de criterios de igualdad de triángulos se propone a partir de todo el trabajo de construcciones hecho y de la discusión acerca de la existencia y unicidad. La realización de construcciones variadas como las que se presentan en el anexo permitirían el enunciado de criterios no necesariamente restringidos a los criterios clásicos.

En relación con los criterios de igualdad para triángulos, se incluye la construcción de posibles criterios de igualdad para cuadriláteros. La discusión con los alumnos de preguntas como ¿es cierto que si dos cuadriláteros tienen sus cuatro lados iguales son iguales?, permite tanto re-trabajar el conocimiento acerca de los cuadriláteros, como también comprender mejor la naturaleza de los criterios construidos para triángulos.

En la unidad 1, se propone tomar como punto de apoyo las propiedades de los paralelogramos para estudiar las relaciones entre ángulos formados por dos paralelas que se cortan por una secante. No se plantea la memorización de los nombres "alternos internos, externos, conjugados, etc.", sino la elaboración por parte de los alumnos de las relaciones entre los distintos ángulos.

Una vez establecidos criterios de congruencia de triángulos, podrán justificarse las construcciones con regla no graduada y compás que se estudian en la unidad 2: de un ángulo igual a otro, de la mediatriz de un segmento, de la bisectriz de un ángulo, de la perpendicular a una recta por un punto, de la paralela a una recta por un punto. En la unidad 2, la congruencia de elementos se establece a través de relaciones sin recurrir a unidades de medida. Esto supone un mayor nivel de generalización para los alumnos ya que se priorizan las relaciones entre elementos de las figuras por sobre las comparaciones con una unidad de medida dada. De esta manera se ponen en juego aspectos más geométricos desvinculados del pasaje por lo numérico que supone la referencia a unidades de medida.

Los alumnos deben aprender que las construcciones de triángulos constituyen un punto de apoyo para las construcciones de polígonos en general.

Dentro del trabajo de construcción, se pueden considerar problemas de dictado de figuras, es decir la descripción de la figura a través de un texto, lo cual supone trascender la interpretación perceptiva y comenzar a buscar cuáles son los elementos y las relaciones que la definen. Esta es una manera de conocer mejor la figura. Se propone también la discusión acerca de cuáles son informaciones necesarias y cuáles suficientes para que pueda reproducirse el dibujo sin verlo. (Ver más detalles sobre esto en el anexo.)

La utilización del compás para las construcciones implica la puesta en juego de la noción de circunferencia; esto debe ser explicitado para que los alumnos tomen conciencia de qué es lo que hacen cuando "pinchan y hacen un arco".

Los problemas a plantear en la unidad 2 enfrentan al alumno a una exigencia diferente, a partir de los instrumentos que se permite utilizar. Es importante tener bien en claro que el objetivo no es desarrollar destreza de dibujante sino sobre todo realizar la planificación de una cierta construcción de la cual se puede afirmar anticipadamente que va a cumplir lo pedido apoyándose en propiedades geométricas. Para hacer énfasis en el desarrollo del razonamiento, más que en la destreza del dibujo, se puede pedir, para alguna de las construcciones, un algoritmo escrito de lo que hay que hacer y una justificación de porqué ese procedimiento va a servir, en vez del dibujo del objeto. (Se detallan algunas construcciones en el ejemplo 28 del anexo.)

Hay muchas demostraciones conocidas del teorema de Pitágoras que aparecen en los libros de textos y que resultan factibles de un tratamiento en la clase en este nivel de la escolaridad.

Se presentan en el anexo (ejemplo 29) algunos problemas que ponen en juego la relación establecida en el teorema entre los lados de un rectángulo y su diagonal (o entre los catetos de un triángulo rectángulo y la hipotenusa).

Si bien circunferencia figura solamente como "título" en la unidad 3, tanto su definición como las propiedades relativas a intersecciones de rectas y circunferencias se ponen permanentemente en juego a propósito de las construcciones planteadas en todas las unidades.

En síntesis el programa que se presenta supone un cambio sustancial de las prácticas geométricas a lo largo del año: al comienzo el alumno planteará conjeturas y arribará a propiedades vía la experimentación y el análisis de dibujos, al final del año deberá ir aceptando la argumentación como práctica válida para fundamentar sus respuestas. Hay un espacio de un año de trabajo para ir produciendo este cambio, que sin duda debe consolidarse

con el trabajo el año siguiente. La "entrada" de los alumnos en la argumentación deductiva es compleja y hay que entenderla como un proceso. Esto lleva implícito que ninguna actividad sola puede garantizar esta entrada y menos aún para la totalidad de la clase.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DEL BLOQUE GEOMETRÍA

El trabajo en torno a este bloque deberá generar condiciones para que los alumnos puedan:

- Mejorar la calidad de su trabajo con la regla y el compás, en particular poder construir triángulos a partir de distintos elementos dados como datos. Disponer de diferentes criterios para poder establecer la igualdad de dos triángulos, conociendo la igualdad de algunos de sus elementos. Identificar cuándo una colección de datos determina unicidad en la construcción requerida y cuándo la construcción es imposible.
- Recurrir a criterios de igualdad de triángulos para resolver diversos tipos de problemas. Enunciar afirmaciones y validarlas o descartarlas, apoyándose en los criterios construidos.
- Comprender las construcciones como actividades que se planifican, apoyándose en propiedades de las figuras. Construir rectas paralelas y perpendiculares con regla y compás.
- Conocer la relación pitagórica entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo y disponer de ella para la resolución de diferentes situaciones.

ANEXO

NÚMEROS

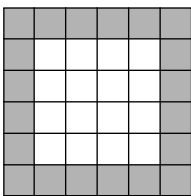
NÚMEROS NATURALES

EJEMPLO 1

■ ACTIVIDAD 1

En esta actividad hay que encontrar una fórmula que permita calcular el número de cuadritos sombreados de una figura como la del modelo, cualquiera sea el número de cuadritos sobre el lado del cuadrado.

Se trata de un ejemplo en el que la diversidad de maneras de contar los cuadritos sombreados dará origen a diferentes escrituras para la fórmula buscada, permitiendo la discusión en torno a la equivalencia de las mismas. En este problema se pone en juego el uso de la propiedad distributiva para expresiones algebraicas.



Una posible gestión es la siguiente:

- dar primero un cuadrado dibujado con 5 ó 6 cuadritos de lado y pedir su conteo;
- preguntar después cuántos cuadritos habrá en el borde de un cuadrado de 37 cuadritos de lado;
- reunidos en grupos, los alumnos deben confrontar las soluciones y elegir una para hacerla pública;
- se solicita a cada grupo la explicación del método utilizado para contar en el caso 37, de manera que pueda servir para contar en otros casos;
- discusión de los métodos de cálculo (que se supone que estarán dados en lenguaje usual);
- se propone luego a los alumnos que escriban una fórmula que refleje el método que elijan (el propio, o alguno de otro grupo que prefieran);

- discusión de las diferentes fórmulas obtenidas (se espera una pluralidad de fórmulas correctas);
- se trabaja sobre la noción de equivalencias de fórmulas;
- se plantean a los alumnos diferentes preguntas que muestren la utilidad de la fórmula para conocer características de la situación que modeliza.

Una cuestión esencial del trabajo algebraico es la lectura de información en una expresión. En este caso, frente a preguntas del tipo: ¿existe algún valor de n para el cual la cantidad de cuadraditos sombreados sea 587?, los alumnos deberán reconocer en la lectura de la expresión $4n - 4$ que eso no es posible, ya que 587 no es múltiplo de 4. ¿Por qué se hace referencia a la lectura de información en una expresión, en el planteo de esta pregunta? Obsérvese que si los alumnos conocen que todo múltiplo de 4 puede expresarse como el producto de 4 por cualquier número entero, al expresar $4n - 4$ como $4(n - 1)$ podrán percibir que al reemplazar por cualquier valor natural siempre se obtendrá como resultado un múltiplo de 4 y por lo tanto, no existirá ningún n para el cual esta fórmula dé 587.

■ ACTIVIDAD 2

Se propone la siguiente sucesión de figuras, construidas con fósforos y se aclara cómo se continúan armando.



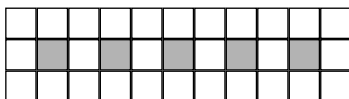
Esquema de tareas para los alumnos:

- Se les pide calcular la cantidad necesaria de fósforos para construir la figura que ocuparía el sexto lugar.
- Se pregunta por la cantidad de fósforos necesarios para construir la figura de lugar 100 en la sucesión.
- Se solicita una fórmula para la cantidad de fósforos del lugar n y se trabaja equivalencia de distintas fórmulas si es que aparecen. (Son probables $3n + 1$ y $4 + 3(n - 1)$.)
- Se formulan preguntas para hacer "funcionar" la fórmula. Por ejemplo: ¿Podrá ser que en alguna ubicación la figura tuviera 1.549 fósforos? Si tengo 1.500 fósforos, y armo una figura de esta forma lo más grande posible, ¿me sobra alguno?

■ ACTIVIDAD 3

Enunciado de la situación para los alumnos:

"Para separar un patio de un lavadero se colocan en línea canteros cuadrados rodeados de baldosas de la misma forma como indica el dibujo".



Primera parte: Como en los problemas anteriores, armar distintas preguntas para llegar a la elaboración de la fórmula y su utilización. Incluir una discusión sobre fórmulas equivalentes, si aparecieran. (Podría surgir $8 + 5(n - 1)$ ó $5n + 3$ ó $3(n + 1) + 2n$ ó $2(2n + 1) + n + 1$, usando distintas maneras de contar.)

Segunda parte: Se propone a los alumnos que repiensen el problema si las baldosas y los canteros fueran de forma hexagonal.

La segunda parte plantea una situación más exploratoria para los alumnos, que deberán hacer ellos mismos el dibujo para armarse una representación del problema. Los canteros hexagonales pueden ubicarse de dos maneras diferentes



dando lugar a disposiciones que requieren de distinta cantidad de baldosas. Ya no se trata de fórmulas equivalentes sino de fórmulas que cuentan diferentes colecciones.

■ ACTIVIDAD 4

Se presenta la siguiente serie y se explica cómo continúa.



1) Se propone a los alumnos que calculen cuántos puntitos hay en la figura que está en el séptimo lugar, luego en el lugar número 50.

La idea del "salto" es que piensen en algún recurso que no sea hacer toda la suma. Si los alumnos no avanzan, se puede sugerir que analicen que los términos equidistantes suman lo mismo; también se puede recurrir a una configuración cuadrada o rectangular –obtenida a partir de dos triángulos–, para contar la cantidad de puntitos de una cierta posición.

2) Se propone a los alumnos que establezcan la cantidad de puntitos de la figura que se encuentra en la posición n .

Podría ocurrir que, para usar el "hecho" de que los términos equidistantes suman lo mismo, los alumnos necesitaran distinguir el caso en que n es par del caso en el que es impar. Sería interesante para ellos constatar que llegan en ambas situaciones a la misma fórmula.

3) Hacer funcionar la fórmula. Por ejemplo, ¿habrá algún triángulo formado por 70 puntitos?

Esto podría pensarse de diferentes maneras. Una posibilidad es analizar que deberían encontrar dos números consecutivos cuyo producto es 140. Haciendo las descomposiciones de 140 en dos factores, verían que en ningún caso los mismos son consecutivos. Otra alternativa sería armar una tabla y analizar que $11 \cdot 12 = 132$ y $12 \cdot 13 = 156$, de manera que no se puede obtener nunca 140.

También se podría confeccionar directamente una tabla para la suma y constatar que para $n = 11$ hay 66 puntitos y para $n = 12$ hay 78, con lo cual no puede haber un triángulo con 70 puntitos.

La actividad 4 es más compleja que las anteriores, pero al mismo tiempo ofrece más variedad de recursos para abordarla. La idea es aprovechar esa diversidad, interviniendo cuando sea necesario para destrabar el trabajo y también, fundamentalmente, en la discusión sobre los distintos métodos de conteo y fórmulas obtenidas. En particular, la discusión de cómo se puede saber que nunca dará 140 puntitos es la oportunidad de enfrentar a los chicos con una fórmula un poco más compleja, que puede ser trabajada sin necesidad de "resolver" la ecuación que resulta. O sea, se estaría propiciando un trabajo temprano con fórmulas y ecuaciones más cualitativo, previo a los métodos de resolución.

■ ACTIVIDAD 5

En esta actividad hay que elaborar un procedimiento para calcular la suma de 10 números consecutivos, cualquiera sea el número inicial. Está armado como un juego para jugar en la clase. En la primera parte de este juego no se permite usar una calculadora.

Primera parte: El profesor escribe en el pizarrón 10 números consecutivos y pide hallar su suma. Luego de finalizado este cálculo, se propone jugar de la siguiente manera: el profesor dice un número y se trata de ver quién da primero el resultado de la suma de los diez números consecutivos a partir del dado. Ésto tiene que servir para que **todos** los alumnos entiendan de qué se trata el juego, aunque tengan dificultades diferentes para hacer el cálculo. Habrá que explicar todo lo que no esté claro.

Segunda parte: Se divide la clase en equipos, se juega un par de veces más. Luego cada equipo tendrá un tiempo para pensar y escribir una estrategia que le permita obtener rápidamente la suma de 10 números consecutivos cualesquiera. Hay que aclarar que debe ser la misma estrategia para cualquier secuencia de 10 números consecutivos. Las estrategias pueden estar en lenguaje coloquial. Se discuten las estrategias.

Tercera parte: Se busca ahora escribir una fórmula que permita, dado el primero de los 10 números consecutivos cualesquiera, obtener como resultado la suma de esos 10 números.

Cuarta parte: Se analizan, se comparan y se validan las diferentes producciones.

Quinta parte: Se pone la fórmula en funcionamiento. Por ejemplo, se puede preguntar: ¿Es posible que la suma de 10 números consecutivos dé por resultado 735.245? ¿Por qué? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuáles son los números que se han sumado?

¿Es posible que la suma sea 18.450? Para esta pregunta se podría apelar directamente al hecho de que la suma obtenida DEBE terminar en 5.

Sexta parte: Se analizan, se comparan y se validan las diferentes producciones.

Este problema es esencialmente diferente del resto de la secuencia.

Por un lado, no se trata de una sucesión de configuraciones geométricas sino de cálculos que dependen de un valor inicial. Por otro lado, es posible que los chicos, en el ánimo de

ganar el juego, encuentren alguna regularidad que les permita dar la respuesta rápidamente pero sin precisar las razones por las cuales eso funciona. Se trata de justificar una conjetura, no solamente de encontrar una respuesta.

Para arribar a una estrategia tal vez los alumnos necesiten hacer varios ensayos con casos particulares. Podría ser que los ensayos "se dirijan" hacia la búsqueda de una estrategia general o sean constataciones que no responden a ningún proyecto. En este último caso sería interesante que el docente plantee alguna cuestión que les permita a los alumnos analizar la estructura de cada cálculo.

El asunto de la justificación se puede plantear antes de la escritura de la fórmula. Podría suceder que algunos alumnos plantearan un procedimiento pero sin demasiada precisión. Para ellos, la escritura de la fórmula va a "forzarlos" a explicitar más claramente las relaciones correspondientes al procedimiento. Para otros, podría ocurrir que tuvieran claro el procedimiento y les resultara difícil "atraparlo" en una fórmula. En cualquier caso, la escritura de la fórmula no es una simple traducción de algo pensado previamente sino que se constituye en un soporte para el pensamiento. Si ocurriera que algunos alumnos encuentran un procedimiento y no saben cómo escribirlo en fórmula, se podría solicitar a los otros grupos que propongan escrituras para dicho procedimiento.

Como puede verse en las cinco actividades que se proponen en este ejemplo, el trabajo con configuraciones de diferente complejidad permitirá la escritura de distinto tipo de fórmulas e involucrará el estudio de diversas cuestiones numéricas.

En definitiva, de toda esta unidad se espera un trabajo que permita la recuperación de propiedades de los números naturales y, al mismo tiempo, se constituya en una de las puertas de entrada al trabajo algebraico. Muy resumidamente se pueden señalar distintos aspectos que se ponen en juego en las actividades de esta unidad:

- concebir una fórmula como modelo de una situación;
- concebirla como reflejo de un proceso de cálculo;
- enfrentarse con la posibilidad de extraer nuevas informaciones sobre la situación, gracias a la fórmula que la modeliza;
- construir la noción de equivalencia de distintas expresiones algebraicas y apoyarse en las propiedades de las operaciones para validar la equivalencia de expresiones.

NÚMEROS

NÚMEROS ENTEROS

EJEMPLO 2

Señalar en la recta numérica el lugar donde puede ubicarse un número a sabiendo que es negativo. ¿Dónde ubicarías el número $-a$? ¿Y $-a - 1$? ¿Y $a + 1$?

Con este problema se busca que los alumnos reconozcan que si un número es negativo, se ubica a la izquierda del cero, más allá de la manera elegida para representar el número. Asimismo, se trabaja con la idea de opuesto, su ubicación en la recta y la representación de otros números dependientes del número inicial. Los alumnos deberán aprender a aceptar que la escritura $-a$ puede representar un número positivo.

EJEMPLO 3

Encontrar un número m de modo tal que al sumarle 3 el resultado sea negativo. ¿Habrá una sola posibilidad? ¿Cuáles son todos los números enteros m que cumplen esta condición?

No se pretende que los alumnos escriban una inecuación, sino que analicen diferentes casos, teniendo en cuenta la exhaustividad que se requiere para proponer todas las posibilidades. La recta numérica puede ser un apoyo para el análisis y la resolución del problema.

EJEMPLO 4

¿Es posible encontrar a y b enteros de manera que $a + b < a$? Hallar ejemplos en caso de ser posible o justificar en caso de ser imposible.

En este caso, se espera que los alumnos resuelvan el problema sin necesidad de operar algebraicamente sino mediante el conocimiento sobre las operaciones con naturales y con enteros. Será importante discutir con los alumnos, luego de la resolución, la posibilidad de encontrar todos los casos posibles y analizar las estrategias que garantizarían la exhaustividad.

EJEMPLO 5

Encontrar todos los valores posibles de a y b para que:

i) $0 < a \times b < 5$ ii) $a \times b < 5$ iii) $a \times b + a < 5$

En el ítem i) se trata de que los alumnos traduzcan la información dada de manera de entender que se necesita buscar dos números cuyo producto dé 1, 2, 3 ó 4. El ítem ii) puede pensarse como una ampliación de i), ya que ahora si a ó b son negativos, se obtiene una solución. A diferencia de los anteriores, el ítem iii) puede requerir además del análisis de la información que portan las expresiones, una transformación de la expresión algebraica involucrada: $a \times b + a = a(b + 1)$, para luego utilizar el análisis realizado para el caso ii).

EJEMPLO 6

Encontrar un número entero a de modo tal que $4 - (2a + 5) = 7$

En este ejemplo, no se pretende "de entrada" que los alumnos recurran al "pase de términos". Se busca que puedan pensar que $2a + 5$ debe ser -3 (así $4 - (-3) = 7$). Del mismo modo, poder imaginar que $2a$ tiene que ser igual a -8 (así $-8 + 5 = -3$). Finalmente, a deberá ser igual a -4 .

EJEMPLO 7

Encontrar, si es posible, dos ejemplos distintos de números enteros a y b de manera que la expresión $(1 + a)(1 + b)$ resulte mayor que $1 + a + b$.

Encontrar ahora, si es posible, dos ejemplos de manera que $(1 + a)(1 + b) < 1 + a + b$ y dos ejemplos donde sea igual.

¿Cuáles son todos los casos posibles para que $(1 + a)(1 + b) < 1 + a + b$?

Los alumnos deberán desarrollar la primera expresión para llegar a que la misma es equivalente a $1 + a + b + ab$. Luego, para decidir si es menor mayor o igual que la otra, hay que estudiar el efecto que produce sumar ab . Probablemente algunos alumnos piensen que la primera expresión es siempre mayor que la segunda, pues aparece algo de más sumando. Será necesario aceptar el hecho de que, al trabajar en Z , se puede obtener un número menor si uno suma un número negativo. En definitiva, es necesario estudiar el signo del producto ab .

En este caso, la manipulación algebraica permite mostrar un aspecto de la expresión que no era visible sin desarrollar la multiplicación.

EJEMPLO 8

¿Cuál deberá ser el valor del número b para que al hacer $5(b + 2) + 3$ dividido 5, el resto sea 3?

Se trata, en estos casos, de reconocer que las propiedades que son válidas para los naturales son posibles de ser pensadas para los enteros, reconociendo que el análisis de la estructura de un cálculo permite "leer" en el mismo ciertas informaciones que se pierden cuando se realiza la operación correspondiente.

Es importante que la variedad de problemas incluya casos en que existan infinitas soluciones, varias soluciones y casos en que no haya solución.

EJEMPLO 9

¿Es cierto que si se suma un número más su doble, más su triplo, más su cuádruplo, el resultado es siempre un número que termina en cero? ¿Por qué?

En este tipo de situaciones se espera que los alumnos reconozcan las "bondades" de expresar algebraicamente la situación y aprendan que transformando dicha expresión algebraica en otra equivalente, se obtiene información que no era visible en la expresión original. Por otro lado, introduce a los alumnos en el trabajo de elaboración de conjeturas y la búsqueda de recursos para dar cuenta de la validez o no de las mismas.

Se propone aquí un doble juego aritmético-algebraico en el que, por un lado, las propiedades de los números enteros son el recurso para analizar las características de las expresiones algebraicas y, por otro, la manipulación algebraica es un recurso para decidir sobre las propiedades de las operaciones. Este tipo de problemas volverá a aparecer en el capítulo de racionales con mayor complejidad.

EJEMPLO 10

Encontrar, si es posible, un número primo a que sea divisor de 12×8 pero que no sea divisor de 12 ni de 8.

Interesa destacar que la idea de número primo se puede enmarcar en el trabajo con la idea de múltiplo y divisor. Las particularidades de los números primos deberán "jugarse" en los problemas que se vayan planteando. En este caso, los alumnos pueden descomponer en números primos el 12×8 y verificar que los únicos primos que son divisores de estos números son también divisores de 12 o de 8.

EJEMPLO 11

"Se seleccionan hojas correspondientes a diferentes meses de un calendario. Se analiza con los alumnos que si se seleccionan `cuadrados de números` de diferentes tamaños (2×2 , ó 3×3 ó 4×4), y se calcula la diferencia entre los productos de los números situados en los extremos de las diagonales, se obtiene, para cada tamaño de cuadrado, un número constante."

El problema apunta a que los alumnos identifiquen que para todos los cuadrados del mismo tamaño se obtiene siempre la misma diferencia. Hay una relación entre las diferencias obtenidas y el tamaño del cuadrado.

Si bien los alumnos suelen apelar al uso de letras, es usual que asignen letras distintas para cada uno de los cuatro números en cuestión. Evidentemente la clave de la resolución está en que sean capaces de expresar los cuatro números en función de uno de ellos. Sin embargo, hay alternativas intermedias y es esperable que de la interacción entre diferentes propuestas de los alumnos se logre una evolución de los procedimientos hasta encontrar una solución.

Normalmente, para cuadrados de 2×2 los alumnos pueden proponer

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} & \begin{array}{cc} a & a+1 \\ a+7 & a+8 \end{array} & \begin{array}{cc} a & a+1 \\ b & b+1 \end{array} & \begin{array}{cc} a & b \\ a+7 & b+7 \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\
 & -1 & a - b & 7(a - b)
 \end{array}$$

Si bien en los dos últimos casos los alumnos no relacionan de entrada los cuatro elementos, en una segunda etapa y, sabiendo cuál debe ser el resultado, pueden darse cuenta de que $a - b$ es -7 para el tercer caso y -1 para el cuarto.

El asunto central de este problema es aceptar la dependencia entre las distintas variables y atreverse a operar con esas relaciones para encontrar la explicación que se busca.

El problema se puede plantear para cuadrados de tamaño tres y cuatro, y también se podría generalizar a cuadros en los que una serie de números consecutivos se distribuyen en filas de igual cantidad de elementos (en el caso del calendario, se distribuyen en filas de 7 elementos).

EJEMPLO 12

Consideren tres números enteros consecutivos cualesquiera. Realicen la diferencia entre el cuadrado del número "del medio" y el producto de los otros dos números. Observen que cualesquiera sean los números que elijan, la diferencia siempre es 1. ¿Cómo pueden explicar esto?

En este problema los alumnos deben expresar los tres números como a , $a + 1$ y $a + 2$, o bien $a - 1$, a y $a + 1$, plantear el cálculo requerido, transformarlo e interpretar que, independientemente de los números elegidos, el resultado es siempre 1. Se trata de seguir trabajando con estos problemas en los que es posible encontrar sentido a las transformaciones algebraicas en tanto herramientas que permiten obtener nueva información a partir de una cierta información inicial.

NÚMEROS

NÚMEROS RACIONALES

EJEMPLO 13

FRACCIONES CON ESCRITURA DECIMAL FINITA Y NÚMEROS PERIÓDICOS

- a) Decidir si las siguientes afirmaciones son ciertas y explicar por qué:
- Al buscar la escritura decimal de $\frac{7}{6}$ la cuenta de dividir no termina nunca.
 - El desarrollo decimal de $\frac{7}{6}$ tiene 76 cifras decimales.
 - Todas las cifras decimales de $\frac{7}{6}$ son iguales.
 - La cifra que está en el lugar veinticinco después de la coma del número $\frac{7}{6}$ es un 6.
- b) Sabiendo que $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$, encontrar una fracción para cada uno de los siguientes números: 0,0333...; 1,3333...; 2,5733333...; 0,66666...
- c) Sabiendo que $\frac{2}{7} = 0,181818\dots$, encontrar una fracción que represente los números: 0,0909; 1,181818...; 5,363636...

d) Para cada una de las siguientes fracciones, establecer si su correspondiente expresión decimal es finita o periódica, sin realizar la división:

$$\frac{3}{5}; \frac{7}{40}; \frac{3}{16}; \frac{4}{3}; \frac{4}{25}; \frac{5}{7}$$

e) Analizar la validez de cada una de las siguientes afirmaciones, explicando por qué son verdaderas o por qué son falsas:

- Todo número racional tiene una expresión decimal finita.
- Todo número racional tiene una expresión decimal finita o periódica.
- Todo número decimal puede escribirse como una fracción con denominador 10.
- Si una fracción tiene denominador 35, seguro que no posee una escritura decimal finita.
- Todo número decimal se puede escribir como una fracción con denominador igual a una potencia de 10.

Los distintos ítemes de este ejemplo pueden ser un medio para introducir el tema de expresiones decimales infinitas y números periódicos.

A partir de un trabajo de búsqueda por parte de los alumnos, se espera poder identificar condiciones para que una fracción admita expresión decimal periódica o finita. Específicamente se espera que puedan formular que todo número racional admite una escritura decimal finita o periódica; es finita cuando el número puede representarse por una fracción irreducible cuyo denominador sólo admite como factores potencias de 2 y de 5.

EJEMPLO 14

Sin utilizar calculadora ni realizar la cuenta de dividir, establecer si alcanzan tres cifras decimales para escribir las siguientes fracciones en notación decimal:

$$\frac{1}{5}; \frac{27}{12}; \frac{3}{20}; \frac{198}{50}; \frac{19}{50}$$

Este problema apunta a que los alumnos se den cuenta de que para responder hay que anticipar si se pueden representar las fracciones dadas con fracciones de denominador 100.

EJEMPLO 15

¿Es posible encontrar números enteros a y b tales que $\frac{9}{a} \times \frac{2}{b} = \frac{6}{13}$?

Julián dice que no es posible encontrar números enteros a y b tales que $\frac{9}{a} \times \frac{2}{b}$ sea igual a $\frac{5}{13}$ y tiene razón. ¿Por qué en el problema anterior era posible y en este no? ¿Qué otras fracciones podrían ponerse como resultado de la multiplicación para que sea posible encontrar números enteros a y b ? ¿Cuántas distintas se pueden poner?

Queda claro que para resolver el problema los alumnos deben conocer el algoritmo de la multiplicación de fracciones. Pero la resolución del problema exige mucho más que esto. Para la primera parte los alumnos podrían, por ejemplo, establecer que $\frac{6}{13}$ es equivalente a $\frac{18}{39}$ y buscar pares de enteros cuyo producto es 39. Para el segundo caso, si los números enteros a y b existieran, debería cumplirse que $5ab = 18 \times 13$ pero como 18×13 no es múltiplo de 5, a y b no existen. La tercera pregunta es mucho más compleja y supone la utilización de lo producido en las dos primeras para generalizar el problema. El ejemplo intenta mostrar cómo los algoritmos de las operaciones pueden "vivir" en el aula a través de la resolución de problemas en los que la finalidad excede ampliamente la producción del algoritmo en sí misma.

EJEMPLO 16

1. ¿Para qué valores de x es $3 + \frac{4}{(x+1)} < 3$?

Se espera que los alumnos analicen que, para que se cumpla la condición pedida, debe ser $\frac{4}{(x+1)}$ menor que cero y para ello $x+1$ debe ser menor que cero, con lo cual x debe ser menor que -1. En este caso se está apuntando al análisis global de la expresión y no el cálculo de la suma $3 + \frac{4}{(x+1)}$.

2. ¿Para qué valores de x es $\frac{x}{(x+1)} < 0$?

Nuevamente, no se trata de "pasaje de término" sino del análisis de la expresión. Se espera que los alumnos lleguen a que, para que el cociente sea negativo, es necesario que nume-

rador y denominador tengan diferente signo. Como $(X + 1)$ es siempre mayor que X , la única posibilidad es que $(X + 1)$ sea positivo y X negativo. La apoyatura en la ubicación de los números en la recta numérica puede ser de mucha utilidad en este ejemplo, ya que ese "salto" de positivo a negativo sólo puede darse si X está en el interior del intervalo entre -1 y 0 . Este problema podría complementarse preguntando ahora cuáles serían todos los números enteros que verifican la condición, tarea que obliga a la comparación entre los dos conjuntos numéricos. También podría estudiarse el problema en Q y en Z pero considerando la relación $>$ en vez de $<$.

3. ¿Para qué valores de X es $\frac{3}{(X+1)} < 1$?

Analizando la expresión, una primera respuesta puede ser que es necesario que $(X + 1)$ sea mayor que 3 , y por lo tanto que X sea mayor que 2 . Pero en este análisis hay un implícito: que el denominador sea positivo. Si estudia la otra posibilidad, se ve fácilmente que siempre que $(X + 1)$ sea negativo se obtiene un cociente negativo y, por lo tanto, menor que 1 . Faltará analizar entonces para qué valores de X se logra que $X + 1$ sea negativo. Este ejemplo lleva a un conjunto solución más complejo que los otros, ya que se encuentran números en dos regiones separadas de la recta. Justamente la ubicación en la recta numérica puede ser una herramienta eficaz para organizar la respuesta.

EJEMPLO 17

Encontrar, si es posible, tres números racionales a de manera que:

1. $(a + 1)^2 < a^2 + 2$
2. $(a + 1) \cdot a < a^2 + 1$
3. $(a + 1)^2 < a^2 + 1$

Para estos problemas, si es necesario realizar la operación que está indicada en los miembros izquierdos de las desigualdades. Una vez efectuado esto, en los tres casos se cancelan los términos con a^2 y resultan distintas condiciones sobre a . Los ejemplos que se presentan son también la oportunidad de discutir la relación entre la expresión $(a + b)^2$ y la expresión $a^2 + b^2$. Se podría continuar entonces demandando ejemplos de números a y b que hagan

iguales a ambas expresiones y ejemplos donde ambas den distinto. Los alumnos podrán concluir entonces que ambas expresiones no son equivalentes (no valen lo mismo para todos los valores posibles de a y b).

EJEMPLO 18

Comparar, sin hacer las operaciones correspondientes:

- a) $0,03456^7$ y $0,03456^8$
- b) $-0,03456^7$ y $-0,03456^8$
- c) raíz cúbica de 0,03 y raíz cuarta de 0,03

EJEMPLO 19

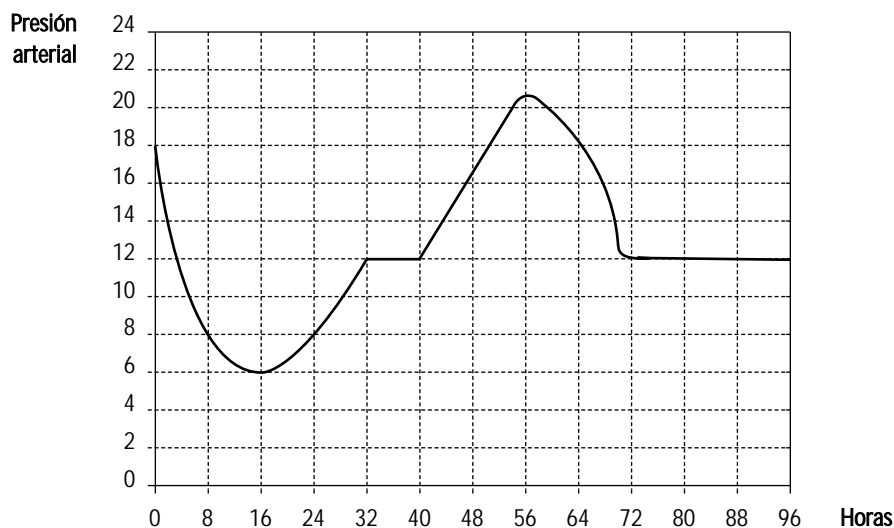
Estudiar la validez de los siguientes enunciados:

- a) si a es un número racional, $a^2 < a$
- b) si a es un número racional, $a^3 < a$

Se trata de trabajar con los aspectos conceptuales de la potenciación, sus propiedades, y no de la realización de cálculos muy complejos. En este caso, se han elegido las bases de las potencias de tal manera que, al no permitir el uso de la calculadora, los alumnos se vean obligados a utilizar el concepto de potencia de exponente natural –apoyado a su vez en el de multiplicación de racionales– para comparar productos cuyos factores sean mayores o menores que 1.

EJEMPLO 20

A un paciente internado en un hospital le controlan la presión arterial de manera continua. El siguiente gráfico muestra la evolución de la presión arterial a partir del momento en que fue internado.



- ¿Durante cuánto tiempo se tomaron los datos de la presión arterial del paciente?
- ¿Entre qué valores osciló su presión?
- ¿En qué períodos el valor de la presión estuvo aumentando? ¿Cuándo fue disminuyendo? ¿En algún momento se mantiene constante? Explicá cómo te das cuenta en el gráfico.
- ¿Cuál fue la máxima presión y cuándo lo alcanzó? ¿Y cuál fue la mínima? ¿A qué hora del día? Explicá cómo te das cuenta en el gráfico.

- e) ¿Cuándo la presión llegó a 8?
- f) ¿Cuál era la presión a las 33 horas de internación?
- g) ¿Cuál era la presión del paciente al finalizar el tercer día de internación?

El objetivo de este problema es estudiar, mediante la observación de un gráfico, distintas características del fenómeno que se modeliza con ese gráfico. Está involucrada la noción de función como relación entre variable, la imagen y preimagen de valores, la noción de máximo y mínimo, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. El punto d) incluye una pregunta sobre la hora del día en que ocurre algo, imposible de contestar a partir de este gráfico, donde sólo cuentan las horas transcurridas desde el momento de la internación.

EJEMPLO 21

En el Observatorio Meteorológico de la ciudad de Moreno se midieron en distintos momentos del día 29 de septiembre las siguientes temperaturas:

HORA	TEMPERATURA
0	5°
2	7°
4	7°
6	8°
8	9°
10	10°
12	13°
14	16°
16	15°
18	9°
20	5°
22	3°
24	2°

- a) ¿Cuál es la temperatura a las 10hs? ¿Y a las 21hs?
- b) En un cierto momento del día la temperatura era de 9° . ¿Se puede saber a partir de la tabla qué hora era?
- c) ¿En qué momentos del día la temperatura se mantuvo estable?
- d) ¿En qué momentos del día la temperatura subió y en cuáles bajó?
- e) ¿Cuál habrá sido la temperatura máxima de ese día? ¿A qué hora?

En este problema la información está dada por una tabla y entre las preguntas hay algunas que no se pueden contestar en forma exacta. Existen cuestiones del fenómeno representado que pueden conocerse solo de manera aproximada a partir de la tabla. El fenómeno estudiado es continuo (la variación de la temperatura) y la tabla provee solamente de información discreta y finita. Es necesario hacer algunos supuestos sobre el comportamiento de la temperatura entre dos valores de la tabla. La realización de un gráfico, aunque no está solicitado, puede ser de utilidad para visualizar la variación de temperatura.

Luego de la resolución de problemas como el 20 y 21 se sugiere plantear una discusión acerca de las ventajas y desventajas de obtener la información a partir de un gráfico o de una tabla.

EJEMPLO 22

Obtención de un gráfico a partir de otro:

- a) A partir de un gráfico de distancia a un punto en función del tiempo para un móvil, obtener el gráfico de distancia total recorrida y analizar en qué casos eso es posible.
- b) A partir del gráfico de la altura de un líquido en un recipiente que se está llenando en función del tiempo, obtener el gráfico de la altura del líquido si el recipiente se vacía.
- c) A partir del gráfico de la altura de una piedra que se lanza hacia arriba en función del tiempo, estimar la velocidad de la piedra en el intervalo estudiado.

EJEMPLO 23

Juan avanza con su automóvil por un camino recto a una velocidad constante. Se sabe que 20 km antes de donde partió se encuentra el inicio del camino y que luego de 10 minutos de haber partido está a 35 km del inicio del camino. ¿A qué distancia del inicio del camino se encontraba a los 5 minutos de haber partido? ¿Y luego de 40 minutos de haber partido?

A partir del desarrollo de este problema, será importante analizar con los alumnos por qué la información acerca de la velocidad constante es la condición que posibilita interpolar y extrapolar datos, unir por una línea recta los dos pares de valores dados, etc. La representación gráfica de la variación de la "distancia al punto de inicio del camino en función del tiempo" es un punto de apoyo para estudiar la situación del problema. Se podrían incluir preguntas acerca de la variación del gráfico en caso de que el punto de inicio estuviera, por ejemplo, a 30 km. A la inversa, se puede presentar un gráfico con pendiente mayor y la misma ordenada al origen, y preguntar qué cambios se tienen que haber producido en la situación para que este resulte el gráfico. El análisis de esta relación gráfico-contexto puede retomarse y profundizarse cuando se estudien en detalle las funciones lineales.

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

FUNCIONES LINEALES

EJEMPLO 24

En un video club se cobra un costo por el alquiler de una película por un día y un recargo fijo por cada día que se demora la devolución. A partir de los datos de la tabla

DÍAS EN ALQUILER	PRECIO A ABONAR
3	5,20
6	8,50
8	10,7

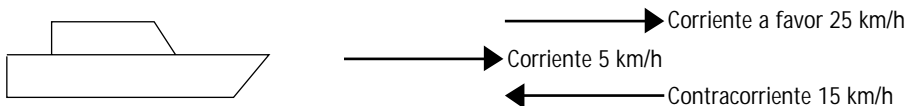
- a) Encontrar el costo del alquiler por película y el recargo por día.
- b) Encontrar la fórmula de la función " precio a abonar" en función de los días que se tiene en alquiler. Graficar la función.
- c) ¿Cuál es la pendiente de esta función? ¿Qué representa en el problema?
- d) ¿Para qué valor de y el gráfico de la función corta al eje vertical (de las y)? ¿Qué representa en el problema?
- f) ¿Cómo sería la fórmula y el gráfico si ahora se quiere considerar el precio a pagar en función de los días de demora? Contestar las preguntas c y d para esta nueva función.
- g) Marcela se olvidó de devolver una película, y cuando lo hizo le cobraron 19,50 pesos. ¿Cuántos días la tuvo hasta devolverla?
- h) Mariano dice que él una vez se fue de vacaciones y olvidó devolver un video. Al volver hizo la cuenta de lo que tenía que pagar y resultó que debía abonar 45 pesos. ¿Estará bien el cálculo de Mariano? ¿Cuántos días habrá estado de vacaciones?

En este problema la información viene dada en una tabla de valores.

A partir de allí es necesario hallar el gráfico y la fórmula. La noción de pendiente se trabaja tanto a nivel de la fórmula, como del gráfico y del contexto. Para la primera fórmula, el valor donde el gráfico corta al eje de las y es 1,9, cuya interpretación en términos del contexto no es directa (representa la diferencia entre el costo inicial de alquiler y el costo por día de recargo). El punto e) permite abordar la cuestión de que una misma situación puede ser modelizada de maneras diferentes, con distintas funciones, si se cambia la variable que se considera como independiente. El resto de las preguntas apunta a poner en funcionamiento la fórmula. (Cualquiera de las dos fórmulas que se produjeron en los ítemes anteriores sirve.)

EJEMPLO 25

Un barco fluvial navega a una velocidad de 20 km/h con el agua calma. Si la corriente del río fluye a 5 km/h, entonces el barco navega a 25 km/h a favor de la corriente o a 15 km/h contracorriente.



El barco sólo tiene combustible para tres horas y sale de su puerto a favor de la corriente. Dibuja una gráfica espacio-tiempo que indique un viaje de ida y vuelta en esas tres horas. ¿En qué momento debe comenzar a volver el barco para que el viaje sea lo más largo posible y que el combustible le permita regresar a puerto? ¿A qué distancia del puerto se encuentra en el momento de comenzar a volver?

En este problema se pone bien en juego la noción de velocidad. Se supone que los alumnos han resuelto ya otros problemas de movimiento uniforme y han tenido oportunidad de estudiar las variaciones que se producen en la representación gráfica cuando se cambia la velocidad o se cambia el punto a partir del cual se miden las distancias recorridas. Por ejemplo, se puede haber hecho antes un problema de movimiento uniforme graficando las distancias al punto de partida, las distancias a un punto intermedio y las distancias al punto de llegada. Para resolver entonces este problema del barco, el recurso de la representación gráfica de la función "distancia al puerto" en función del tiempo resulta ser de utilidad. Para responder a la pregunta sobre un viaje de ida y vuelta de la mayor duración posible, puede comenzarse el dibujo desde el momento de la partida y también dibujar la porción de recta que correspondería al viaje de retorno. Para alumnos que han tenido suficiente experiencia previa con representaciones gráficas, en este problema se pone en relieve la utilidad de la misma como recurso para resolver problemas.

EJEMPLO 26

Actividades de dictado de figuras: Las actividades de dictado de figuras pueden utilizarse para recuperar propiedades que se suponen conocidas por los alumnos o para elaborarlas. En este tipo de actividades, la clase se organiza en una cantidad par de grupos, la mitad de los grupos serán A y la otra mitad B. Cada grupo A trabaja apareado con un grupo B, formando un solo equipo. El profesor entrega una figura (la misma) a todos los grupos A y otra a los grupos B.

CONSIGNA: Cada grupo (A o B) tiene que escribir un mensaje (sin dibujos) que contenga todas las informaciones que consideren necesarias como para que la otra parte del equipo (B o A) pueda construir la figura sin verla. Si al recibir el mensaje no entienden algo, pueden pedir aclaraciones por escrito. Cuando ambos grupos de cada equipo terminen, se van a reunir y van a comprobar si las figuras que realizaron pueden superponerse exactamente con las que recibieron. Si las figuras no coinciden, entre todos tratarán de analizar dónde estuvo la falla.

Describir la figura a través de un texto supone trascender la interpretación perceptiva y comenzar a buscar cuáles son los elementos y las relaciones que la definen. Esta es una manera de recuperar propiedades de la figura o de comenzar a conocer la figura y entonces poder identificar algunas de sus propiedades.

El docente puede elegir la figura con la que se trabajará en función de las características que le interese recuperar o construir.

EJEMPLO 27

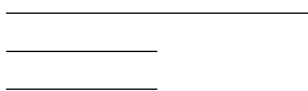
Actividad de construcción de triángulos a partir de dos o tres datos: Para estas primeras construcciones, no se restringen los instrumentos a la regla no graduada y el compás,

aunque sí se espera que este último aparezca como recurso útil para los traslados de segmentos.

- a) Se dan dos segmentos que deben ser iguales a dos lados del triángulo. ¿Se pueden dibujar dos triángulos distintos? ¿Cuántos distintos puede haber?
- b) Se dan tres segmentos que deben ser iguales a los tres lados del triángulo. ¿Se pueden dibujar dos triángulos distintos? ¿Cuántos distintos puede haber?

En los problemas a) y b) los datos son lados. Es probable que los alumnos comiencen a trabajar haciendo solamente uso de la regla y la escuadra. Una discusión sobre todas las soluciones posibles para el problema a) podría hacer ver que, si se fija la ubicación de uno de los lados, y se fija en cuál de sus dos extremos concurrirá el otro lado, el otro extremo de este segundo lado en distintas posiciones determina un arco de circunferencia. A partir de esta constatación, el compás puede aparecer como una herramienta útil en las construcciones que requieran traslado de medidas. Para el problema b), es necesario poner en discusión si a partir de tres segmentos cualesquiera siempre se puede construir un triángulo. Se podría plantear un problema particular como el siguiente, donde la medida de dos de los lados suman lo mismo que la medida del tercero.

"Dados los tres segmentos siguientes



construir si es posible, usando compás, un triángulo que los tenga como lados. ¿Se pueden construir dos triángulos distintos a partir de estos datos? ¿Por qué?

Algunos alumnos, en el intento de realizar la construcción, perciben la imposibilidad de llevarla a cabo diciendo: "los lados no cierran", "los lados no alcanzan", "los lados no se juntan", ... Otros, en cambio, debido a los errores que una construcción efectiva necesariamente entraña, logran "armar" un triángulo "aplastado". Los alumnos discuten entonces si, con los datos dados, existe o no el triángulo. A partir de aquí, y a través de una propuesta del docente de analizar las características de los datos presentados es posible concluir acerca de la imposibilidad de construcción del triángulo a pesar de lo que algunas experiencias "muestran". La acti-

vidad permite arribar a que si la suma de la medida de dos lados coincide con la medida del tercer lado o es menor que la medida del tercer lado, el triángulo no puede construirse.

Obsérvese que en este caso se estaría arribando al enunciado de una propiedad (la propiedad triangular) vía la realización de un dibujo particular y el análisis (que puede ser producto de una discusión colectiva) de la construcción del mismo; esto provoca en el alumno el convencimiento de la validez de la propiedad. Vía una construcción imposible, se puede arribar a la ley que enuncia cuándo es posible.

- c) Se dan dos segmentos y un ángulo, que deben ser iguales a dos lados y el ángulo comprendido. ¿Se pueden dibujar dos triángulos distintos? ¿Cuántos distintos puede haber?
- d) Se dan un segmento y dos ángulos, que deben ser iguales a un lado y los dos ángulos adyacentes. ¿Se pueden dibujar dos triángulos distintos? ¿Cuántos distintos puede haber?
- e) Se dan dos ángulos, que deben ser iguales a dos de los ángulos del triángulo. ¿Se pueden dibujar dos triángulos distintos? ¿Cuántos distintos puede haber?

Para los problemas que involucran ángulos –c), d) y e)– será necesario incluir en la actividad un trabajo de revisión sobre el traslado de ángulos con compás y la medida de ángulos con un transportador.

- f) Se dan tres ángulos, que deben ser iguales a los ángulos del triángulo. ¿Se pueden dibujar dos triángulos distintos? ¿Cuántos distintos puede haber?

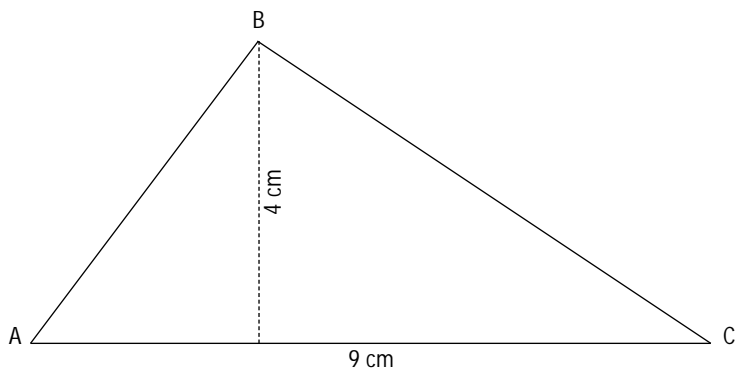
Para responder a esta pregunta, habrá que apelar a la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. La idea de semejanza, tema que será estudiado el próximo año, puede comenzar a aparecer aquí, ligada a que todos los infinitos triángulos que se obtienen fijando el valor de sus tres ángulos tendrán todos la misma "forma", y variarán en tamaño.

- g) Se dan dos segmentos y un ángulo. Un segmento debe ser igual a un lado y el otro a la altura del triángulo a construir. El ángulo debe ser adyacente al lado dado. ¿Se pueden dibujar dos triángulos distintos? ¿Cuántos distintos puede haber?
- h) Dados tres segmentos, ¿siempre se puede construir un triángulo de manera que dos de ellos sean lados y el tercero una altura correspondiente a uno de los lados?

Se analizan estos dos casos con mayor detalle fijando un enunciado, por ejemplo:

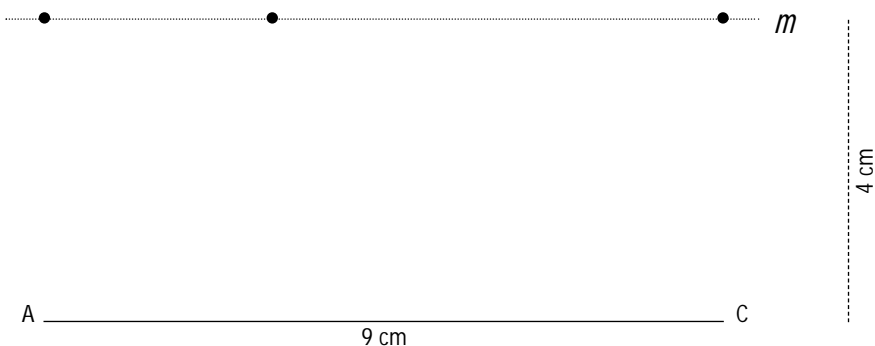
Construir un triángulo \widehat{ABC} en el que \overline{AC} es de 9 cm, la altura perpendicular a \overline{AC} es de 4 cm y el lado \overline{AB} es de 5 cm.

Para tener una representación de la situación, es útil –casi imprescindible– hacer una figura de análisis.

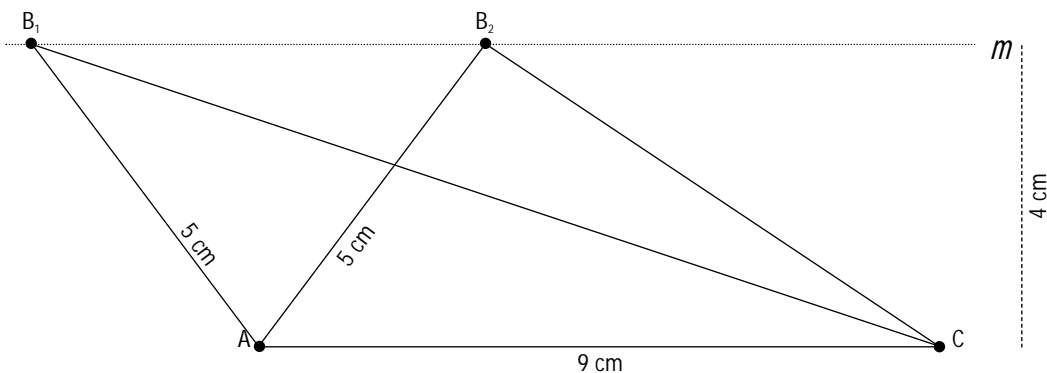


La figura de análisis es un esquema y cumple la función de hacer observables las relaciones necesarias para resolver el problema, pero no "porta" en realidad los datos de la figura a construir. Este tratamiento es difícil para los alumnos y es necesario pensar que llegarán a apropiarse de él luego de una larga experiencia con construcciones.

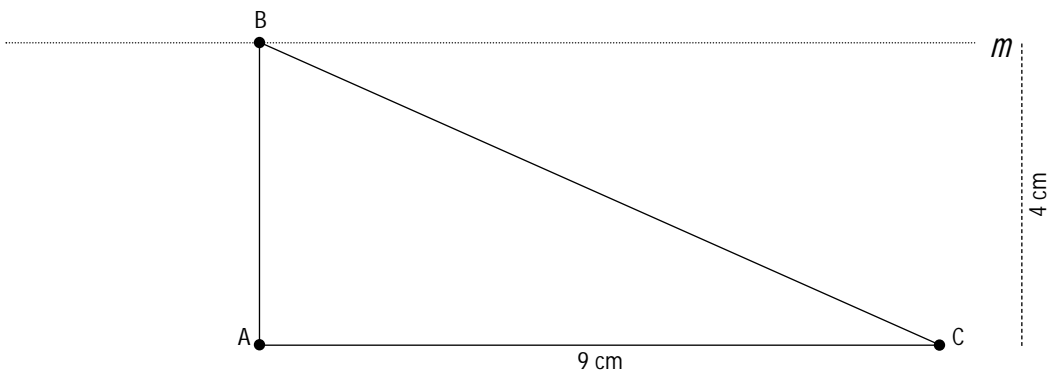
En este problema, a partir de la figura de análisis, se puede llegar a establecer la utilidad de trazar el lado \overline{AC} y a 4 cm una recta m paralela al mismo. Sobre esta recta estará el tercer vértice del triángulo dado que cualquier punto de la misma está a una distancia \overline{AC} igual a la altura.



Al tener la medida de \overline{AB} , podemos usar el compás para determinar todos los puntos que se encuentran a 5 cm de A.



El vértice B se encuentra en la circunferencia y en la recta m . Pero al ser la distancia de m a \overline{AC} menor que \overline{AB} , la recta y la circunferencia se cortan en dos puntos: B_1 y B_2 . Los triángulos $\triangle AB_1C$ y $\triangle AB_2C$ son diferentes y ambos cumplen con las condiciones del problema inicial. En otras palabras, el problema tiene dos soluciones. ¿En qué caso la solución hubiese sido única? Si \overline{AB} hubiera sido igual a la altura, habríamos obtenido un único triángulo rectángulo.



Si en cambio \overline{AB} hubiera sido menor que la altura, la circunferencia de centro A y radio \overline{AB} no habría cortado a la recta y el problema no habría tenido solución. Esto permite arribar a la respuesta del problema h).

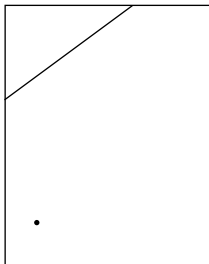
Vemos entonces que un problema de construcción a partir de un conjunto de datos permite introducir la cuestión de la compatibilidad de los datos y da lugar al análisis de la cantidad de soluciones.

Para esta construcción de paralelas se permitirá, por el momento, el uso de la regla y la escuadra, más adelante se planteará el problema del trazado de paralelas con regla y compás.

EJEMPLO 28

Construcciones con regla no graduada y compás

1. La tradicional construcción con compás de la bisectriz de un ángulo o de un ángulo congruente a uno dado puede ser discutida para que los alumnos pongan en juego los criterios de igualdad de triángulos construidos en la unidad anterior.
2. La construcción de la mediatriz de un segmento permite también una justificación apoyada en los criterios de congruencia de triángulos.
3. El trazado de una recta perpendicular a otra (por un punto dado de la primera o por un punto exterior), así como el trazado de rectas paralelas, obliga a una planificación sobre la base de las construcciones ya hechas o a las propiedades de los objetos geométricos que se conocen. En algunos casos es interesante solicitar la escritura de un algoritmo de trazado y no el dibujo efectivo. Por ejemplo, se podría dar dibujados en una hoja de papel un segmento y un punto como indica el siguiente esquema:



La tarea consiste en dibujar con regla y compás, sin salir nunca de la hoja, un segmento que pase por el punto y que sea perpendicular al segmento dado. Al ser inaccesible la intersección de los dos segmentos, será necesario planificar construcciones auxiliares.

EJEMPLO 29

Teorema de Pitágoras

1. Juan camina cada mañana 500 m hacia el sur y 100 m hacia el oeste para llegar a la escuela. Rosario camina 300 m hacia el norte y 300 hacia el oeste, y también llega a la escuela. Rosario dice que aunque caminan lo mismo, ella está más cerca de la escuela, ¿puede tener razón?
2. Supongamos que se marcaran medidas en las tres aristas que se determinan en el rincón de una habitación, simulando ejes cartesianos. Si una mosca está situada en el punto que corresponde a las coordenadas $(2, 5, 9)$, ¿cuál es la distancia de la mosca al rincón?
3. Un cubo hueco tiene 4 cm de arista. Se quiere colocar una varilla adentro, de manera que nada sobresalga fuera de la caja. ¿Cuál es la longitud máxima que puede tener la varilla?

El problema 1 puede servir como anticipatorio de que hay una relación entre los lados y la diagonal de un rectángulo que no es la suma. En principio este resultado puede sorprender a los alumnos que quizás comprueben la afirmación midiendo sobre dibujos hechos a escala. No es de esperar que de esas mediciones resulte la relación que guardan estas tres medidas. Sin embargo, cualquiera sea la actividad que se plantee para arribar a la relación pitagórica, se estaría apoyando en un proceso de búsqueda de los alumnos.

En los problemas 2 y 3 es necesario elaborar una relación en tres dimensiones, a partir del teorema de Pitágoras.